Журнал математической физики, анализа, геометрии
2006, т. 2, № 3, с. 231–267

Алексей Васильевич Погорелов — математик удивительной силы

А.А. Борисенко

Механико-математический факультет
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина
E-mail:borisenk@univer.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 30 января 2006 г.

В статье изложены основные математические результаты, полученные А.В. Погореловым, а также дается краткий очерк его жизни.

В статті викладено основні математичні результати, які одержані О.В. Погорєловим, а також дається короткий нарис його життя.

Ключевые слова: выпуклая поверхность, эллиптическое дифференциальное уравнение.
Mathematics Subject Classification 2000: 53C45, 35J60.

Введение

К началу XX века были развиты методы для решения локальных задач, относящихся к регулярным поверхностям. Такие задачи достаточно общим образом сводились к анализу и решались средствами анализа. Совсем другое положение вещей обнаружилось по отношению к глобальным задачам, которые называют также задачами геометрии в целом. В этих задачах требуется заключать о свойствах всей поверхности в зависимости от дифференциальных свойств, данных в каждой ее точке. Перед многими из таких задач и геометрия, и анализ были одинаково беспомощными. Например, классическая проблема об однозначной определенности замкнутых выпуклых поверхностей (овалоидов) лишь в некоторой степени была продвинута ценой упорных усилий первоклассных математиков (Г. Либмана, Г. Минковского, Д. Гильберта, Г. Вейля, В. Бляшке). В начале двадцатых годов С. Кон-Фоссен, наконец, дал первое решение проблемы, доказав, что изометричные овалоиды равны, но это решение было не окончательным, овалоиды предполагались подчиненными условиям трехкратной дифференцируемости и положительности гауссовой кривизны. Между тем, еще Коши доказал равенство изометричных замкнутых выпуклых многогранников. Казалось, что эти два результата являются частными случаями общей теоремы о равенстве любых (вообще говоря, нерегулярных) изометричных овалоидов. К такой теореме не было подходов. Не было также видно никаких путей к доказательству возможности изометрического преобразования (изгибания) овалоида после отсечения от него какой-нибудь части. Тем более не было средств для оценки степени изгибаемости неполного овалоида. В предположении достаточной регулярности эти задачи легко сводились к дифференциальным уравнениям; но при этом получались нелинейные уравнения, теория которых была в зачаточном состоянии.

Следует заметить, что геометрические вопросы, о которых мы сейчас говорим, были в центре внимания математиков, прилагавших значительные усилия, чтобы специально развить нужные методы анализа. В качестве примера можно привести исследования проблемы Вейля о существовании замкнутой выпуклой поверхности с заранее данной аналитической метрикой положительной гауссовой кривизны (заданной на топологической сфере). Решение проблемы было намечено в общих чертах самим Г. Вейлем в 1916 г. и завершено в 30-х годах Г. Леви путем использования очень тонких результатов построенной им аналитической теории уравнений Монжа–Ампера. Однако в работах Г. Леви анализ развивался обособленно от геометрии и применялся к ней как готовый внешний инструмент. В большинстве других работ данного направления суть сводилась к нескольким приемам решения отдельных задач. Фактически, никто в то время не проник в существо исследуемых вопросов, и фундаментальные проблемы изгибания поверхностей, и многие другие задачи, относящиеся к геометрии в целом, оставались неприступными.

В начале XX века также активно развивалась теория выпуклых тел в евклидовом пространстве: их геометрические свойства, способы задания, смешанные объемы и неравенства между ними. В 1934 году на немецком языке вышла книга Т. Боннезена и Т. Фенхеля «Теория выпуклых тел», которая подытожила этот этап исследования. В ней была приведена полная библиография до этого времени. Эта книга не потеряла своей ценности и в наши дни. В 2001 году она была переведена на русский язык под редакцией В.А. Залгаллера. Но в этой книге изучались свойства выпуклых множеств, но не свойства выпуклых поверхностей, и тем более никто не интересовался их внутренней геометрией.

1. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей

Первые работы А.Д. Александрова были в этом же русле. Развивая классические исследования Г. Минковского, Александр Данилович Александров установил новые неравенства для смешанных объемов выпуклых тел. Попутно им были найдены аналогичные алгебраические неравенства, которые спустя сорок лет получили совершенно неожиданное применение к решению известной, поставленной еще в 1926 г., проблемы Ван дер Вардена об оценке перманента. Неравенства Александрова для смешанных объемов в настоящее время нашли интересные обобщения и приложения также и в алгебраической геометрии и теории нелинейных эллиптических уравнений, а понятие о смешанных объемах проникло даже в теорию случайных процессов.

Одновременно А.Д. Александров ввел в теорию выпуклых тел аппарат теории меры и функционального анализа, предложив рассматривать функциональное пространство, порожденное опорными функциями, и специальные меры над ними — «поверхностные функции» и родственные «функции кривизны». Он доказал теоремы единственности с точностью до переноса выпуклого тела с заданной функцией кривизны, охватившие, как крайние, частные случаи известной ранее теоремы Кристоффеля и Минковского. При этом Александр Данилович определил обобщенные дифференциальные уравнения в мерах и соответствующие обобщенные решения.

В 1941 году А.Д. Александров начал изучать внутреннюю геометрию выпуклой поверхности, расширил класс регулярных выпуклых поверхностей до совокупности всех выпуклых поверхностей (такая поверхность определяется как область на границе произвольного выпуклого тела). Для решения конкретных проблем в расширенном классе нужно было гауссову геометрию регулярной поверхности заменить более общей теорией. В первую очередь требовалось подвергнуть специальному изучению внутренние свойства произвольной выпуклой поверхности, то есть такие свойства, которые обнаруживаются при помощи измерений, производимых на поверхности; потребовались средства для исследования внутренних свойств; нужно было найти подходы к доказательству теорем о связях между внутренними и внешними свойствами произвольных выпуклых поверхностей. В этом направлении А.Д. Александровым была построена внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Внутреннюю геометрию выпуклой поверхности (как и любой поверхности) А.Д. Александров строит в связи с общим понятием метрического пространства. Пусть R — метрическое пространство, т.е. множество элементов любой природы, в котором для каждой пары элементов X, Y определено число $\rho(X,Y)$, именуемое расстоянием и удовлетворяющее условиям:

1. $\rho(X,Y) \geqslant 0$.
2. $\rho(X,Y) = 0$ тогда и только тогда, когда $X \equiv Y$.
3. $\rho(X,Y) + \rho(Y,Z) \geqslant \rho(X,Z)$ (неравенство треугольника).

Например, евклидово пространство с обычным расстоянием между точками, очевидно, является метрическим. *Кривой* в метрическом пространстве

R называется непрерывный образ любого отрезка, рассматриваемый вместе с каким-либо непрерывным отображением отрезка на этот образ. Подобно тому, как в обычном пространстве, для кривых в метрическом пространстве вводится понятие длины. Если кривая γ задается отображением $X = X(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, то за *длину* кривой γ принимают число

$$l_\gamma = \sup \Sigma\, \rho(X(t_{k-1}),\, X(t_k)), \quad a \leqslant t_1 \leqslant t_2 ... \leqslant b,$$

где $\rho(X(t_{k-1}),\, X(t_k))$ — расстояние между точками $X(t_{k-1})$ и $X(t_k)$ в пространстве R, а верхняя грань берется по всем конечным разбиениям отрезка $[a, b]$ точками t_k. Определяемое таким образом понятие длины кривой обладает характерным для нее свойством аддитивности. Именно, если кривая γ составлена из кривых γ_1 и γ_2, то длина кривой γ равна сумме длин кривых γ_1 и γ_2.

Подобно тому, как для кривых евклидова пространства, множество кривых ограниченной длины в компактной области метрического пространства компактно, т.е. из любой бесконечной последовательности таких кривых можно выделить сходящуюся подпоследовательность. При этом длина предельной кривой не больше нижнего предела длин кривых этой подпоследовательности.

Допустим, что любые две точки X, Y метрического пространства R можно соединить спрямляемой кривой. Тогда в пространстве R естественно определяется внутреннее расстояние $\rho^*(X, Y)$ между точками X, Y как нижняя грань длин кривых, соединяющих эти точки. Легко видеть, что это расстояние удовлетворяет условиям 1–3 метрического пространства. Определяемая таким способом метрика ρ^* называется *внутренней* метрикой пространства R. Если $\rho(X, Y) = \rho^*(X, Y)$ для любых X и Y, то пространство R называется *пространством с внутренней метрикой.*

Пусть R — многообразие с внутренней метрикой; кривая γ в многообразии R называется *кратчайшей*, если ее длина равна расстоянию между ее концами и, следовательно, не больше длины любой другой кривой, соединяющей те же точки. Каждый отрезок кратчайшей также является кратчайшей. Предельная кривая для сходящейся последовательности кратчайших есть кратчайшая.

В общем случае не всякие две точки в многообразии можно соединить кратчайшей, но каждая точка многообразия имеет окрестность, любые две точки которой допускают соединение кратчайшей. Если многообразие R метрически полно, т.е. любое замкнутое ограниченное множество в нем компактно, то любые две точки такого многообразия можно соединить кратчайшей.

Для того чтобы R было изометрично вообще какой-нибудь поверхности в евклидовом пространстве, его метрика необходимо должна быть внутренней.

В метрическом пространстве R естественно определяются понятия треугольника, многоугольника, ломаной (из кратчайших). Нетривиальным является определение угла между кривыми. Понятие угла лежит в основе теории. В основе определения угла лежит конструкция, состоящая в том, что по треугольнику в метрическом пространстве строится его развертка: то есть треугольник на обычной евклидовой плоскости с теми же длинами сторон. Пусть O — точка метрического пространства, OA, OB — две кратчайшие, исходящие из нее. Выберем произвольным образом на кривых OA и OB точки X и Y. И пусть $O'X'Y'$ — развертка треугольника OXY. Пусть $x = \rho(O,X)$, $y = \rho(O,Y)$, а $\gamma(x,y)$ — угол при вершине O' треугольника $O'X'Y'$. Верхний угол между кратчайшими OX и OY понимается как верхний предел $\gamma(x,y)$, когда x, y стремятся к нулю.

После того, как введено понятие угла, определяется избыток треугольника $\alpha+\beta+\gamma-\pi$, где α, β, γ — верхние углы между сторонами. Отсюда уже возникает возможность дать общее определение двумерных пространств неотрицательной кривизны: R называется пространством неотрицательной кривизны, если любая точка R имеет такую окрестность, что избыток каждого, лежащего в ней треугольника, не отрицателен. Каждая выпуклая поверхность является пространством неотрицательной кривизны. Условие неотрицательности кривизны равносильно требованию о том, что функция $\gamma(x,y)$ является невозрастающей. То есть, если $x_1 \leqslant x_2, y_1 \leqslant y_2$, то $\gamma(x_1,y_1) \geqslant \gamma(x_2,y_2)$. Из свойств монотонности функции $\gamma(x,y)$ следует существование обычного предела, который и является углом между кратчайшими OX и OY.

К числу важнейших проблем в общем плане исследования поверхностей относится построение теории кривых. В смысле А.Д. Александрова кривизна понимается как аддитивная функция множества. В качестве внешней кривизны множества M, лежащего на выпуклой поверхности, естественно, берется площадь сферического образа множества M. Кривизна как объект внутренней геометрии выпуклой поверхности определяется А.Д. Александровым прежде всего для трех «основных множеств»: 1) кривизна открытого треугольника принимается равной его избытку; 2) кривизна открытой кратчайшей принимается равной нулю; 3) кривизна точки равна $2\pi - \theta$, где θ — полный угол вокруг этой точки. После этого кривизна как аддитивная функция однозначно определена на всех борелевских множествах. А.Д. Александровым доказана теорема: кривизна всякого борелевского множества на выпуклой поверхности равна площади сферического изображения его борелевского образа. Тем самым theorema egregium Гаусса обобщена на любые выпуклые поверхности. Вместе с тем в теории произвольных выпуклых поверхностей установлена основная связь между внутренней геометрией и внешними свойствами поверхности. Отсюда последовал ряд важных конкретных выводов. В частности, следует, что удельная кривизна области на выпуклой поверхности (т.е. отношение площади сферического образа к площади самой области) есть инвариант изометрического преобразования выпуклой поверхности. Поэтому введенный А.Д. Александровым класс выпуклых поверхностей ограниченной удельной кривизны допускает внутреннее геометрическое определение. А.Д. Александров доказал, что каждая полная выпуклая поверхность ограниченной удельной кривизны (метрика которой не всюду евклидова) является гладкой, а неполная поверхность может иметь нарушения гладкости лишь в виде прямолинейных ребер, концы которых лежат на границе поверхности. Это — первый результат в проблеме о степени регулярности выпуклой поверхности в зависимости от регулярности ее внутренней метрики.

В отличие от гауссовой теории поверхностей, где господствуют аналитические методы, в теории Александрова применяются методы геометрического характера. Основным аппаратом является аппроксимация так называемыми многообразиями с многогранной метрикой. (Во внешней геометрии этому соответствует аппроксимация общей выпуклой поверхности выпуклыми многогранниками.) Простая и естественная внутренняя аппроксимация многогранниками позволила при решении задач для общих выпуклых поверхностей начать решения этих задач для многогранников, а решение в общем случае получить переходом к пределу. Именно такими средствами была создана стройная теория кривизны выпуклых поверхностей, некоторые предложения которой мы приводили выше.

Пусть P — замкнутый выпуклый многогранник. Представим себе, что с помощью ломаных линий он разрезан на части, каждую из которых можно развернуть и наложить на плоский многоугольник; пусть $G_1, \ldots, G_n$ — эти многоугольники. Система многоугольников $G_1, \ldots, G_n$ с заданной идентификацией их вершин и сторон называется разверткой многогранника P. Очевидно, что каждая развертка удовлетворяет следующим условиям: 1) комплекс $\{G_1, \ldots, G_n\}$ гомеоморфен сфере; 2) идентифицируемые стороны равны; 3) в идентифицируемых вершинах сумма углов $\leqslant 2\pi$. Предположим теперь, что заранее задан комплекс евклидовых многоугольников $G_1, \ldots, G_n$ и соблюдены указанные условия; иначе говоря, предполагается, что заранее дана развертка абстрактного многогранника с метрикой положительной кривизны. А.Д. Александровым доказана «теорема о склеивании многогранника», которая гласит: из каждой развертки $G_1, \ldots, G_n$ можно склеить замкнутый выпуклый многогранник (при этом многоугольники $G_1, \ldots, G_n$, вообще говоря, придется перегибать по определенным, но заранее не известным прямым). Эта теорема дает решение проблемы Вейля для многогранных метрик; ее доказательство проведено с помощью развитого А.Д. Александровым весьма общего метода, основанного на топологической теореме об инвариантности области. Тем же методом А.Д. Александров получил решение проблемы Минковского о существовании выпуклого многогранника с данными площадями и направлениями граней, теорему о существовании многогранника с данными кривизнами и многие другие предложения. Этот метод дает ясные пути поисков теорем такого рода вообще.

Исходя из теоремы о склеивании была удивительно просто и притом в предельно общих предположениях относительно задаваемой метрики решена проблема Вейля. Именно, А.Д. Александровым доказана теорема: если двумерное пространство положительной кривизны гомеоморфно сфере, то оно изометрично некоторой замкнутой выпуклой поверхности. Решением проблемы Вейля А.Д. Александров проиллюстрировал силу и мощь прямых геометрических методов. Более того, Александр Данилович использовал доказанную теорему как этап в глубоком продвижении всей проблематики изгибания выпуклых поверхностей. Имеется в виду его «метод склеивания», основанный на теореме А.Д. Александрова, которую он назвал «общей теоремой о склеивании». Эта теорема далеко обобщает теорему о склеивании многогранников. Изложим сущность дела в самых общих чертах.

Пусть в каких-нибудь двумерных пространствах положительной кривизны даны области $G_1, \dots, G_n$. Представим себе, что эти области вырезаются из своих пространств и некоторые участки их границ отождествляются («склеиваются») так, что при этом получается двумерное многообразие. Если отождествляемые участки имеют равные длины, то на полученном многообразии естественным образом определяется внутренняя метрика. А.Д. Александров сформулировал необходимые и достаточные условия, при которых полученное многообразие является также пространством положительной кривизны; эти условия просты, естественны и эффективны. В частности, если склеенное многообразие гомеоморфно сфере, то его можно реализовать в виде замкнутой выпуклой поверхности. Тем самым дана чрезвычайно общая теорема о существовании выпуклой поверхности, склеенной из кусков абстрактно данных многообразий, или из кусков выпуклых поверхностей. Применяя метод склеивания, А.Д. Александров доказал локальную теорему: для того чтобы каждая точка двумерного пространства R имела окрестность, изометричную выпуклой поверхности, необходимо и достаточно, чтобы R было пространством положительной кривизны. Тем самым решена основная проблема внутренней геометрии выпуклых поверхностей, то есть для выпуклых поверхностей дана исчерпывающая внутренняя характеристика. Методом склеивания можно доказать, что после отсечения от овалоида какого-нибудь куска, оставшаяся часть его допускает изгибания (достаточно абстрактно заклеить овалоид и менять форму подклеенного куска). Можно доказать, например, что, изгибая половину эллипсоида, ее можно «закрыть» и превратить в замкнутую выпуклую поверхность. Можно приводить множество других подобных примеров. По существу метод склеивания в сочетании с теоремами о реализуемости абстрактно заданной выпуклой метрики выпуклой поверхностью позволил принципиально до конца решить все основные проблемы изгибания для выпуклых поверхностей [1–3].

Можно сказать, что Александр Данилович создал новую вселенную (геометрию общих выпуклых поверхностей). Недаром на конференции в г. Новосибирске, посвященной его семидесятипятилетию, он шутя как-то сказал: «...академик не Бог, но он богоподобный». (А у него к тому же в это время была большая импозантная борода.) И эту вселенную надо было заселять, но возникли трудности и проблемы.

Стоял открытым вопрос о равенстве замкнутых изометричных выпуклых поверхностей, а также полных некомпактных выпуклых поверхностей.

Если, пользуясь теоремой Александрова, будем изометрично погружать аналитическую метрику положительной гауссовой кривизны, заданную на сфере, то получим лишь C^1- гладкую поверхность. Поэтому естественно возник вопрос о регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой положительной кривизны. Если применим метод склеиваний к регулярной выпуклой поверхности положительной гауссовой кривизны, то метод гарантировал лишь ее выпуклость и из теоремы Александрова об ограниченной удельной кривизне следовала лишь регулярность класса C^1.

Известная проблема Минковского состоит в решении вопроса о существовании замкнутой выпуклой поверхности, у которой гауссова кривизна $K(n)$ задана как функция внешней нормали n поверхности. Г. Минковский доказал, что если среднее значение величины $n/K(n)$, заданной на единичной сфере, равно нулю, то существует, и притом единственная, с точностью до сдвига, замкнутая выпуклая поверхность с гауссовой кривизной $K(n)$. При этом гауссова кривизна понимается в смысле Гаусса как предел отношения площади сферического изображения области поверхности к площади области, когда она стягивается к точке. Решение проблемы, данное Г. Минковским, не содержит никакой информации о регулярности поверхности, даже если заданная функция $K(n)$ аналитическая. Г. Леви доказал, что если функция $K(n)$ является аналитической, то существует аналитическая замкнутая выпуклая поверхность с кривизной $K(n)$.

В связи с результатами Г. Минковского и Г. Леви возникают следующие вопросы. Можно ли утверждать, что для регулярной функции $K(n)$ проблема Минковского имеет регулярное решение? Какую регулярность поверхности гарантирует при этом принадлежность поверхности к классу C^k? Нельзя ли утверждать, что выпуклая поверхность, не обязательно замкнутая, регулярна, если регулярна функция $K(n)$?

2. Годы становления А.В. Погорелова

Без решения этих проблем новая теория была неполноценна. И появился человек, который ответил на все эти вопросы Это был А.В. Погорелов. Он родился 3 марта 1919 года в г. Короче Белгородской области. Его отец Василий Степанович имел лишь корову и лошадь. Во время коллективизации под давлением он вступил в колхоз, куда вынужден был отдать домашний скот, который очень любил. Однажды он пошел на колхозную конюшню и увидел свою лошадь истощенную, умирающую от жажды. А конюх в это время пьянствовал. И Василий Степанович избил конюха, бывшего бедняка. Это было представлено таким образом, будто кулак избил бедняка, и Василий Степанович вынужден был бежать из деревни с женой Екатериной Ивановной, даже оставив детей. Через неделю Екатерина Ивановна тайком вывезла детей. Так А.В. Погорелов оказался в г. Харькове, где его отец устроился работать на строительстве тракторного завода. О том, что его родители пострадали во время коллективизации, я услышал от него только в 2000 году. Это событие, по-моему, оказало большое влияние на его линию общественного поведения: он был очень осторожен в высказываниях. Как-то в 1980 году он сказал, что его мама учила: "Молчание — золото". Но никогда не допускал поступков, противоречащих его убеждениям. Уже переехав в Москву к сыну, он рассказывал мне, как отбояривался от вступления в партию, и это ему удалось. Насколько я знаю, он никогда не подписывал писем с осуждением диссидентов, но, по-моему, также и никаких писем в их защиту. А.В. Погорелов был депутатом Верховного Совета Украины несколько созывов (хотя, как он говорил, пробовал также от этого открутиться).

Уже в школьные годы отчетливо стали проявляться математические способности А.В. Погорелова. Одноклассники в шутку прозвали его Паскалем. Он становится победителем одной из первых математических олимпиад, которые проводил Харьковский университет для школьников, а также Всеукраинской олимпиады. А.В. Погорелов также хорошо рисовал. И родители не знали, по какому пути его направить. Его мать обратилась за советом к учителю математики сына. Тот посмотрел рисунки и сказал, что мальчик хорошо рисует, но в период индустриализации на рисование не проживешь. Это и определило выбор образования. В 1937 году Алексей Васильевич поступает на математическое отделение физико-математического факультета Харьковского университета.

Увлечение Алексея Васильевича математикой сразу привлекло к нему внимание преподавателей. Профессор П.А. Соловьев предложил юному студенту изучить книгу Т. Боннезена и В. Фенхеля «Теория выпуклых тел» на немецком языке. С этого времени геометрия становится для Алексея Васильевича основным интересом жизни. Война не дала возможности окончить университет. Его призывают в армию и направляют на учебу в Военно-воздушную академию им. Н.Е. Жуковского. Но интерес к геометрии у Алексея Васильевича не угасает. В августе 1943 года он пишет своему преподавателю Я.П. Бланку: «Очень жалею, что из Харькова не захватил свой конспект Т. Боннезена и В. Фенхеля о выпуклых телах. Там у меня много интересных вопросов по геометрии в целом... . Не найдется ли у Вас для меня какого-нибудь интересного вопроса по геометрии в целом или вообще по геометрии? Хотелось бы поломать голову...».

В 1945 году по окончании обучения в Военно-воздушной академии А.В. Погорелов начинает работать инженером-конструктором в Центральном аэрогидродинамическом институте. Желание завершить университетское образование и серьезно заниматься геометрией приводит его в Московский университет. А.В. Погорелов обратился к декану механико-математического факультета академику И.Г. Петровскому с вопросом об окончании своего математического образования. В Харьковском университете он окончил четыре курса физико-математического факультета. Но когда И.Г. Петровский узнал, что кроме того Алексей Васильевич окончил академию им. Н.Е. Жуковского, то он посчитал, что нет нужды в формальном окончании образования. Тогда А.В. Погорелов высказал свое желание заниматься геометрией. И.Г. Петровский посоветовал ему обратиться к В.Ф. Кагану. При встрече В.Ф. Каган спросил о том, чем бы хотел заниматься Алексей Васильевич, на что получил ответ — выпуклой геометрией. В.Ф. Каган заметил, что это вопрос не к нему, а к А.Д. Александрову, который сейчас находится в Москве и собирается на квартире Б.Н. Делоне к выезду в альпинистский лагерь. (А.Д. Александров был мастером спорта по альпинизму, а Б.Н. Делоне — зачинателем советского альпинизма.)

Первая аудиенция продолжалась десять минут. Сидя на рюкзаке, Александр Данилович поставил перед Алексеем Васильевичем задачу об оценке длины кратчайшей на выпуклой поверхности: верно ли, что на замкнутой выпуклой поверхности гауссовой кривизны $K \leqslant 1$ отрезок геодезической, длины не большей π, является кратчайшей. В течение года задача была решена утвердительно, и в 1946 году была опубликована статья [4]. Эта теорема относится не к внешней геометрии, а к римановой геометрии. И ее обобщение на многомерный случай было доказано В. Клингенбергом в 1959 году: в полном односвязном римановом пространстве M^{2n} секционной кривизны $0 < K_\sigma \leqslant K_1$ геодезическая длины, не превосходящей $\pi/\sqrt{K_1}$, есть кратчайшая. В нечетномерном случае теорема справедлива при более жестких ограничениях на кривизну, а именно, $K_\sigma \geqslant \frac{1}{4}K_1 > 0$. Это ограничение по существу.

Лет пять-семь тому назад я спросил Алексея Васильевича, почему не было уделено достаточно внимания глобальной римановой геометрии. На что он ответил: «У нас было и без того много задач». Но В.А. Топоногов говорил мне, что первым, кто оценил его теорему сравнения о треугольниках в римановом пространстве, был А.В. Погорелов. Правильнее называть эту теорему сравнения теоремой Александрова–Топоногова, так как А.Д. Александров открыл ее и доказал для общих выпуклых поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве.

Алексей Васильевич поступает в заочную аспирантуру МГУ к профессору Н.В. Ефимову. Изучив в рукописи книгу А.Д. Александрова «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей», он начинает заниматься геометрией общих выпуклых поверхностей. Н.В. Ефимов видел свою роль руководителя в том, чтобы вдохновить своего аспиранта на решение сложной проблемы.

Много раз мне приходилось докладывать на семинарах Н.В. Ефимова и А.В. Погорелова. Они очень отличались своим стилем: на семинар Н.В. Ефимова долго собирались, доклад продолжался пару и после доклада неизменно хвалили, так что даже трудно было понять, хороший ты получил результат или не очень. Алексей Васильевич всегда пунктуально приходил к началу семинара, никогда не опаздывал. Доклад длился не более часа: Алексей Васильевич не любил слушать доказательства. По-моему, он просто сам после формулировки результата его немедленно воспроизводил. В оценке результатов был строг и даже суров. В 1968 году в Харьков, на геометрический семинар приезжали докладывать три претендента на докторскую степень, из которых Алексей Васильевич поддержал только одного, В.А. Топоногова, а два других поехали в Новосибирск и получили поддержку А.Д. Александрова. Диссертации были успешно защищены.

А.В. Погорелов хвалил редко, но когда сдержанно хвалил — это значило, что ты получил хороший результат. Он очень быстро соображал, обладал громадной геометрической интуицией, и ему все быстро становилось на докладе ясно. Многие члены семинара не отваживались задавать вопросы, чтобы не выглядеть незнайками.

В 1947 году Алексей Васильевич защитил кандидатскую диссертацию, в которой доказал, что на любой общей замкнутой выпуклой поверхности существуют три замкнутых квазигеодезических [5]. Эта теорема есть обобщение теоремы Люстерника–Шнирельмана о существовании трех замкнутых геодезических на замкнутой регулярной выпуклой поверхности. Квазигеодезические — это кривые, являющиеся обобщением геодезических, в которых поворот слева и справа на каждом отрезке кривой неотрицателен.

Защитив диссертацию, А.В. Погорелов демобилизуется из армии и переезжает в г. Харьков, что, наверное, не просто было сделать. Это видно даже из приказа о демобилизации — он демобилизуется одновременно с сыном М.М. Литвинова, бывшего министра иностранных дел СССР. Через год Алексей Васильевич защищает докторскую диссертацию по теме "Однозначная определенность выпуклых поверхностей ограниченной удельной кривизны" и вскоре доказывает теорему об однозначной определенности в самой общей постановке [6].

3. Однозначная определенность замкнутых выпуклых поверхностей

В 1813 году О.Л. Коши доказал замечательную теорему.

Теорема Коши. *Пусть два замкнутых выпуклых многогранника составлены из равных граней (то есть соответствующие грани являются выпуклыми многоугольниками, которые можно совместить движением), составленные в одном и том же порядке. Тогда многогранники равны. То есть их можно совместить движением.*

А.Д. Александров показал, что можно, не меняя доказательства, принадлежащего О. Коши, условие равносоставленности заменить более слабым условием изометричности поверхностей многогранников. Конечно, без условия выпуклости теорема Коши не верна.

Башня с четырехскатной крышей на кубическом основании и башня с продавленной крышей составлены из соответственно равных граней, примыкающих друг к другу в одном и том же порядке. Но они не равны друг другу.

Для регулярных замкнутых выпуклых поверхностей класса C^3 положительной гауссовой кривизны теорема об однозначной определенности была доказана в 1923 году С. Кон-Фоссеном, для поверхностей класса C^2 неотрицательной гауссовой кривизны — Г. Герглотцом в 1942 г.

А.В. Погорелов доказал обобщение теоремы Коши на случай произвольных выпуклых поверхностей. Две поверхности называются изометричными, если существует отображение одной поверхности на другую, при котором длины соответствующих при отображении кривых равны.

Теорема 1 (А.В. Погорелов, 1949)[7]. *Две замкнутые изометричные выпуклые поверхности в трехмерном евклидовом пространстве равны, то есть совмещаются движением.*

Главным достижением А.В. Погорелова является то, что для поверхностей не требуется дополнительных требований регулярности. Поверхности могут иметь ребра, конические точки. Единственное внешнее ограничение — это выпуклость изометричных поверхностей. Без этих требований теорема неверна. Действительно, если мы отрежем от сферы шапочку и зеркально отобразим ее относительно плоскости сечения, то получим невыпуклую поверхность, изометричную сфере, но не равную ей.

Мы видим, что потребовалось 100 лет для доказательства теоремы в общей постановке. Несмотря на то, что после доказательства теоремы прошло более полувека, до сих пор не существует более простого, короткого доказательства.

Доказательство А.В. Погорелова строилось следующим образом: допустим, что существуют две неравные изометричные замкнутые выпуклые поверхности F_0, F. Тогда было доказано, что существует сколь угодно близко к F_0 изометричная ей замкнутая выпуклая поверхность F_1. Дальше производится смешивание поверхностей. Операция смешивания поверхностей заключается в построении поверхности F_λ, состоящей из точек пространства, которые делят отрезки, соединяющие соответствующие по изометрии точки, в отношении $\lambda : (1-\lambda)$. При этом поверхности F_λ и F_μ при λ, близком к $1/2$ и $\mu = 1-\lambda$ являются изометричными поверхностями. Рассмотрим изометричные выпуклые поверхности, которые однозначно проектируются на плоскость xy, обращены выпуклостью к ней, и опорные плоскости образуют с плоскостью xy углы $\theta < \frac{\pi}{2}$. Такое расположение называется каноническим расположением поверхностей. На таких поверхностях рассматриваются нормальные равноотстоящие кривые. Это кривые, которые соответствуют друг другу по изометрии поверхностей, и их соответствующие точки находятся на одинаковом расстоянии от плоскости xy. С одной стороны, он доказал, что на изометричных выпуклых поверхностях в каноническом расположении не может быть замкнутых нормальных равноотстоящих кривых, с другой стороны, указаны такие кривые. Это противоречит тому, что поверхности F_0, F_1 не равны. Для построения близкой изометричной поверхности была использована теорема А.Д. Александрова о склеивании и теорема об однозначной определенности замкнутых выпуклых многогранников. Для изучения кривых использовалась теория кривых ограниченной вариации поворота, развитая А.Д. Александровым и В.А. Залгаллером, а также многочисленные геометрические синтетические конструкции, придуманные А.В. Погореловым. Нужда в этих конструкциях была вызвана отсутствием аналитического аппарата, связанным с наличием конических, ребристых точек на поверхности. Все это делает работу очень трудной для чтения. Помню, когда в 1970 году я в первый раз поехал докладывать на семинар в Ленинград, то один из вопросов был, сумел ли я до конца пробиться в разборе доказательства теоремы. Другое доказательство этой теоремы следует из теоремы о жесткости замкнутых выпуклых поверхностей, доказанной также А.В. Погореловым [6]. Доказательство теоремы об однозначной определенности замкнутых выпуклых поверхностей следует также из оценки деформации замкнутой выпуклой поверхности в зависимости от изменения ее внутренней метрики. Этот результат был доказан Ю.А. Волковым [8].

За решение проблемы об однозначной определенности выпуклых поверхностей Алексей Васильевич Погорелов получил Сталинскую премию 2 степени. Как рассказывал Алексей Васильевич, в 1951 г. из Киева вдруг приходит телеграмма, что Академия наук выдвинула его на вакансию члена-корреспондента и просила дать согласие на переезд в г. Киев. Н.И. Ахиезер сказал: «Сделаем вид, что мы не получали телеграммы. Университет Вас сам выдвинет».

Бесконечно малым изгибанием называется такая бесконечно малая деформация поверхности, при которой длины кривых на поверхности стационарны. Поле скоростей деформации называется изгибающим полем. Изгибающее поле называется тривиальным, если оно является полем скоростей движения поверхности как твердого тела. Если поверхность не допускает иных бесконечно малых изгибаний, кроме тривиальных, то она называется жесткой. В. Бляшке доказал, что замкнутая регулярная выпуклая поверхность с положительной гауссовой кривизной не допускает иных регулярных бесконечно малых изгибаний, кроме тривиальных.

Пусть F — регулярная поверхность $r = r(u, v)$ и $\tau(u, v)$ — гладкое векторное поле, заданное в точках поверхности. Рассмотрим деформацию поверхности

$$r = r(u, v) + t\tau(u, v).$$

Если длины кривых стационарны, то

$$\langle r_u, \tau_u \rangle = 0, \qquad \langle r_u, \tau_v \rangle + \langle r_v, \tau_u \rangle = 0, \qquad \langle r_v, \tau_v \rangle = 0.$$

Это и есть дифференциальные уравнения бесконечно малых изгибаний. Для составляющей ζ поля τ по оси z для поверхности $z = z(x, y)$ получаем уравнение

$$z_{xx}\zeta_{yy} - 2z_{xy}\zeta_{xy} + z_{yy}\zeta_{xx} = 0, \tag{1}$$

откуда следует, что поверхность $z = \zeta(x, y)$ имеет неположительную гауссову кривизну.

Для бесконечно малых изгибаний общей выпуклой поверхности почти всюду также имеет место уравнение (1) и имеет место

Основная лемма. *Если $F : z = z(x, y)$ — выпуклая поверхность, не содержащая плоских областей и $\zeta(x, y)$- составляющая по оси z ее изгибающего поля, то поверхность $\Phi : z = \zeta(x, y)$ является поверхностью неположительной кривизны, т.е. от нее нигде нельзя отрезать горбушку или, другими словами, на ней нет точек строгой выпуклости.*

В регулярном случае это значит, что гауссова кривизна неположительна.

Используя этот фундаментальный факт, А.В. Погорелов доказал, что имеет место

Теорема 2. *Замкнутая выпуклая поверхность, не содержащая плоских областей, жесткая, т.е. изгибающее поле* $\tau = a \times r + b$, *где* a, b *— постоянные векторы,* r *— радиус-вектор поверхности. Замкнутая выпуклая поверхность, содержащая плоские области, является жесткой вне плоских областей.*

Результаты А.В. Погорелова об однозначной определенности и жесткости легли в основу его геометрической теории оболочек. Насколько я знаю, механики сначала восприняли ее в штыки. Мне рассказывал мой научный руководитель по аспирантуре Е.П. Сенькин, что, когда Алексей Васильевич показывал им результаты экспериментов по изгибанию оболочек, которые подтверждали его теорию, то они говорили, что, мол, пальцем "натыкал".

Переезд А.В. Погорелова в г. Харьков был, действительно, успешный. Н.И. Ахиезер обратил внимание Алексея Васильевича на работы С.Н. Бернштейна по задаче Дирихле для уравнений эллиптического типа [9]. И соединение аналитических результатов С.Н. Бернштейна с синтетическими геометрическими методами позволило решить вопросы о регулярности выпуклых поверхностей с регулярной метрикой положительной кривизны и регулярности выпуклой поверхности в решении проблемы Минковского с регулярной положительной гауссовой кривизной как функцией нормали.

До 1934 года С.Н. Бернштейн работал в Харькове и вынужден был уехать после того, как подал в печать статью против огульного внедрения марксизма в математику. После этого началась публичная травля С.Н. Бернштейна. Замечу, что первый Всесоюзный математический съезд был в Харькове потому, что там работал С.Н. Бернштейн.

А.В. Погорелова можно считать преемником С.Н. Бернштейна в области дифференциальных уравнений. Неоднократно Алексей Васильевич использовал и прекрасную теорему Бернштейна о том, что явно заданная над всей плоскостью поверхность неположительной гауссовой кривизны, которая на бесконечности растет медленнее линейной, является цилиндром.

4. Регулярность выпуклых поверхностей с регулярной метрикой и проблема Минковского

Регулярность поверхности сводится к регулярности решений уравнения Дарбу:

$$\begin{aligned}(z_{uu} - \Gamma_{11}^1 z_u - \Gamma_{11}^2 z_v)(z_{vv} - \Gamma_{22}^1 z_u - \Gamma_{22}^2 z_v) - (z_{uv} - \Gamma_{12}^1 z_u - \Gamma_{12}^2 z_v)^2 \\ = K(E - z_u^2)(G - z_u^2) - (F - z_u z_v)^2,\end{aligned}$$

где E, F, G — коэффициенты I квадратичной формы, Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля, z — координата радиус-вектора. Его коэффициенты определяются только метрикой поверхности. Это нелинейное уравнение Монжа–Ампера эллиптического типа, если гауссова кривизна положительна. Задача состоит в том, чтобы доказать регулярность решений в зависимости от регулярности коэффициентов. Первый этап доказательства заключался в том, что для регулярной шапки были даны оценки для тангенса угла наклона касательной плоскости к плоскости основания и нормальных кривизн в зависимости только от величин, определяемых только внутренней метрикой шапки. Была также дана оценка нормальных кривизн во внутренних точках поверхности только в зависимости от величин, определяемых внутренней метрикой шапки и расстояния от плоскости края. Для получения оценки нормальных кривизн был использован метод вспомогательных функций, восходящий к С.Н. Бернштейну. Но здесь искусство заключается в том, чтобы в каждой конкретной задаче выбрать соответствующую вспомогательную функцию. Алексей Васильевич владел этим искусством виртуозно. Данные оценки соответствовали априорным оценкам на первые и вторые производные решения уравнения Дарбу в зависимости от коэффициентов уравнения и их производных. Это значит, что, допуская существование регулярного решения уравнения, мы даем оценки на производные разных порядков решения в зависимости от коэффициентов и их производных, расстояния от границы и производных решения низших порядков. Принципиальным является то, что априорные оценки для производных 1 и 2 порядка следуют из геометрических соображений. И аналогичные оценки Алексей Васильевич получает во многих задачах. Дальше можно использовать аналитический аппарат. Априорные оценки производных более высоких порядков функции $z = z(x, y)$, удовлетворяющей уравнению в частных производных второго порядка эллиптического типа

$$F(x, y.z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy}, z_{xy}) = 0, \tag{2}$$

можно получить, пользуясь уже только аналитическими методами:
1) для модулей третьих производных z в точке (x, y) могут быть получены оценки в зависимости от расстояния точки (x, y) до границы области G, где задано $z = z(x, y)$ — регулярное решение уравнения (2), а также в зависимости от верхней грани модулей функции z и ее производных до второго порядка, верхней грани модулей частных производных функции F до третьего порядка, верхней грани модулей величин

$$\frac{1}{F_r}, \quad \frac{1}{F_t}, \quad \frac{1}{F_rF_t - \frac{1}{4}F_s^2}, \quad \text{где} \quad r = z_{xx}, \quad s = z_{xy}, \quad t = z_{yy};$$

2) оценки для четвертых и последующих производных решения $z = z(u, v)$ уравнения (2) основаны на теории Шаудера для линейных уравнений эллиптического типа.

Оценки на производные k-порядка решения $z = z(x, y)$ $(k \geqslant 3)$ уравнения (1), заданного в круге $\omega_\varepsilon : x^2 + y^2 \leqslant \varepsilon^2$, — зависят от верхней грани модуля z и его производных до второго порядка в круге ω_ε, верхней грани величин

$$\frac{1}{F_r}, \quad \frac{1}{F_t}, \quad \frac{1}{F_r F_t - \frac{1}{4}F_s^2}$$

и верхней грани модулей производных функций F до $s-$ порядка, причем $s = 3$ при $k = 3$, и $s = k - 1$ при $k > 3$. Более того, в зависимости от тех же величин могут быть указаны оценки для наименьших постоянных Гельдера производных k-порядка функции z относительно любого показателя α, $0 < \alpha < 1$.

Второй этап доказательства заключается в том, что заданная в круге аналитическая метрика g положительной гауссовой кривизны с положительной геодезической кривизной края реализуется выпуклой аналитической шапкой, аналитически продолжаемой за границу.

Здесь А.В. Погорелов проводит доказательство методом продолжения по параметру, идея которого восходит к С.Н. Бернштейну. Алексей Васильевич блестяще применял его во многих работах. Для данной проблемы этот метод требует решения трех задач:

I. Включение метрики в однопараметрическое семейство аналитических метрик g_t; $0 \leqslant t \leqslant 1$; $g_1 = g$, и метрика g_0 реализуется выпуклой аналитической шапочкой. За метрику g_0 берется сегмент сферы.

II. Если метрика g_{t_0} погружаема в виде выпуклой аналитической шапки, то близкие метрики также погружаемы.

III. Если метрика g_{t_n} погружаема и $t_n \to t_0$, то метрика g_{t_0} также погружаемая.

Из этого следует, что метрика $g = g_1$ также реализуется аналитической выпуклой шапкой.

Вторая задача эквивалентна решению краевой задачи для уравнения Дарбу в единичном круге с нулевыми значениями на его окружности. Согласно теореме Бернштейна, для того чтобы уравнение эллиптического типа $F = 0$ допускало решение в области G, которая ограничена аналитическим контуром γ, обращающееся в аналитическую функцию дуги $\varphi(s)$ на контуре γ, необходимо и достаточно, чтобы в данное уравнение мог быть введен параметр t так, чтобы оно обращалось в уравнение $F(t) = 0$, для которого:

1) при всех $0 \leqslant t \leqslant 1$ из предположения существования регулярного решения, соответствующего тем же краевым условиям, вытекала равномерная ограниченность его модуля, как и модулей его частных производных первых двух порядков по x и y;

2) при $t = 1$ $F(t) = 0$ обращается в уравнение $F = 0$;

3) при $t = 0$ оно имело очевидное аналитическое решение.

Из полученных априорных оценок первых и вторых производных следует, что теорема Бернштейна выполнена и задача II решена.

Решение задачи III следует из априорных оценок на производные до 4 порядка. Тогда предельная поверхность будет класса C^3. А из теоремы Бернштейна об аналитичности решений уравнений эллиптического типа будет следовать аналитичность предельной шапки.

Третий этап доказательства регулярности выпуклой поверхности А.В. Погорелов проводит следующим образом: из регулярности метрики и положительности кривизны и теоремы Александрова следует, что поверхность гладкая и строго выпуклая. Поэтому в произвольной точке поверхности можно параллельно сдвинуть касательную плоскость и отрезать шапку F_0. Дальше приближается метрика шапки аналитическими метриками, которые заданы в области, ограниченной аналитическими кривыми положительной геодезической кривизны. Эти метрики реализуются аналитическими шапками, которые сходятся к предельной шапке F_1, изометричной первоначальной. Из априорных оценок следует регулярность шапки F_1. При малых условиях регулярности $n = 2, 3$ используются априорные оценки Хайнца для оценки первых и, соответственно, вторых производных радиуса-вектора поверхности. Если вместо ранее выписанных априорных оценок для производных более высокого порядка использовать теорему Ниренберга о характере регулярности дважды дифференцируемого решения уравнения эллиптического типа с регулярными коэффициентами в применении к уравнению Дарбу, то получим более тонкие результаты. Согласно этой теореме, из двукратной дифференцируемости поверхности F_1 и n-кратной дифференцируемости метрики следует, что поверхность F_1 принадлежит классу $C^{n-1,\alpha}, 0 < \alpha < 1$. Но изометричные шапки равны. Поэтому первоначальная шапка F_0 была также регулярной поверхностью.

В итоге справедлива

Теорема 3 (А.В. Погорелов) [10–12, 6]**.** *Если выпуклая поверхность имеет регулярную метрику класса C^n, $n \geqslant 2$, и положительную гауссову кривизну, то сама поверхность принадлежит классу $C^{n-1,\alpha}$ при любом α, $0 < \alpha < 1$. Если метрика поверхности аналитическая, то поверхность аналитическая.*

Первый результат по регулярности выпуклых поверхностей А.В. Погорелов опубликовал в 1949 году в [10], а полное изложение — в [11] в 1950 году, где из k-раз дифференцируемости ($k \geqslant 4$) метрики и положительности гауссовой кривизны следовало, что поверхность по крайней мере $(k-1)$ раз дифференцируемая. Окончательная формулировка для $k = 2, 3$ была представлена в [12].

Позднее, в 1953 году, зная результат А.В. Погорелова, Л. Ниренберг дал свое доказательство теоремы о регулярности [13]. Он доказал, что для двумерной метрики класса $C^{m,\alpha}$, $m \geqslant 4{,}0 < \alpha < 1$, положительной гауссовой кривизны, существует локальное изометричное погружение в E^3 регулярной поверхностью класса $C^{m,\alpha}$, а для метрик класса C^4 существует изометричное погружение класса $C^{3,\alpha}$, где $0 < \alpha < 1$.

В классах C^k регулярности Л. Ниренберга регулярность изометрического погружения та же, а в классах Гельдера — результат более тонкий. Он основан на априорной оценке в классах Гельдера вторых производных решений общего нелинейного эллиптического уравнения

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy}, z_{xy}) = 0,$$

полученной Л. Ниренбергом [14].

Заметим, что теорема Погорелова о регулярности принципиально более общая, чем доказанная Л. Ниренбергом.

То, что двумерное многообразие с внутренней метрикой неотрицательной кривизны локально изометрически погружается в виде выпуклой поверхности, следует из теоремы Александрова. Римановы метрики положительной гауссовой кривизны являются таковыми. Теорема Погорелова гарантирует, что все эти поверхности будут регулярными, если метрики удовлетворяют условиям теоремы, а теорема Ниренберга утверждает только то, что среди них найдется регулярная поверхность. Дело в том, что у А.В. Погорелова была доказана теорема об однозначной определенности изометричных выпуклых шапок. Этого инструмента не было у Л. Ниренберга.

Если рассматривать метрики в классах регулярности Гельдера, то оказывается, что никаких потерь регулярности нет. Справедлива

Теорема (И.Х. Сабитов). *Выпуклая поверхность с $C^{n,\alpha}$, $n \geqslant 2$, $0 < \alpha < 1$ регулярной метрикой положительной кривизны является $C^{n,\alpha}$ гладкой* [15].

Естественно, возникает в некотором смысле обратный вопрос — как связаны между собой класс регулярности подмногообразия в римановом пространстве и класс регулярности метрики, индуцированной этим погружением.

На первый взгляд, регулярность метрики должна быть ниже. Но в действительности это не так. И.Х. Сабитов и С.З. Шефель с помощью введенных ими гармонических координат доказали, что верна

Теорема. *Всякая $C^{k,\alpha}$, $k \geqslant 2$, $0 < \alpha < 1$, гладкая l-мерная поверхность F^l в римановом пространстве M^n, регулярности не ниже регулярности поверхности, является $C^{k,\alpha}$-гладким изометрическим погружением некоторого $C^{k,\alpha}$-гладкого риманова многообразия M* [16].

Теорема о регулярности выпуклой поверхности, доказанная А.В. Погореловым, влекла за собой новые результаты о регулярности решений уравнения типа Монжа–Ампера. В дальнейшем это породило геометрическую теорию сначала двумерного уравнения Монжа–Ампера, а потом и многомерного, о чем еще будем говорить.

Мне как-то довелось высказать Алексею Васильевичу свое мнение о том, что теорема о регулярности выпуклых поверхностей с регулярной метрикой положительной кривизны является лучшей его теоремой. Но он не согласился со мной, считая таковой теорему об однозначной определенности. Одновременно с теоремой о регулярности выпуклой поверхности в 1952 году Алексей Васильевич дал решение проблемы Минковского [17].

Теорема 4. *Если гауссова кривизна выпуклой поверхности всюду положительна и как функция внешней нормали к поверхности регулярна (m раз дифференцируема, $m \geqslant 3$), то сама поверхность регулярна (по крайней мере $m+1$ раз дифференцируема).*

Замечу, что эта теорема локальна для области на поверхности, сферическое изображение которой есть малый круг на сфере. Из нее и из теоремы единственности, доказанной Г. Минковским, следует регулярное решение проблемы Минковского.

Теорема 5. *Пусть на единичной сфере Ω с центром в начале координат O задана (k раз дифференцируемая, $k \geqslant 3$) положительная функция $K(n)$ точки n на сфере. Пусть эта функция удовлетворяет условию*

$$\int \frac{n\,d\omega}{K(n)} = 0,$$

где $d\omega$— элемент площади сферы Ω, а интегрирование распространяется на всю сферу.

Тогда существует регулярная (по крайней мере $k+1$ раз дифференцируемая) поверхность F, которая в точке с внешней нормалью n имеет гауссову кривизну $K(n)$. Поверхность F определена однозначно с точностью до параллельного переноса.

В 1953 году Л. Ниренберг передоказал эту теорему методом продолжения по параметру, используя априорные оценки Миранды. Работая в классах Гельдера, он доказал, что если $K(n) \in C^{k,\alpha}$, $k \geqslant 2$, $0 < \alpha < 1$, то регулярность поверхности есть класса $C^{k+1,\alpha}$. Если $K \in C^2$, то регулярность поверхности будет класса C^2 [13].

Но аналога локальной теоремы А.В. Погорелова у Л. Ниренберга нет. Поэтому он мог доказывать регулярность поверхности только лишь при условии, что функция $K(n)$ задана на всей сфере, что неестественно, так как регулярность — это локальное свойство поверхности.

А.В. Погорелов говорил мне, что Р. Курант считал, что вопросы регулярности поверхности с регулярной внутренней метрикой и регулярной гауссовой кривизной, как функцией нормали, решены А.В. Погореловым в большей общности и более естественной постановке, чем Л. Ниренбергом.

5. Выпуклые поверхности в римановом пространстве

Вершиной применения аналитических средств А.В. Погореловым было решение проблемы погружения гомеоморфного сфере риманова многообразия в общее трехмерное риманово пространство. Была доказана

Теорема 6 [18, 6]**.** *Пусть R — полное трехмерное риманово пространство и M — замкнутое, гомеоморфное сфере риманово многообразие с гауссовой кривизной, всюду больше некоторой постоянной C. Тогда, если кривизна пространства R всюду меньше C, то M допускает изометрическое погружение в R в виде регулярной поверхности.*

Более того, это погружение можно осуществить так, чтобы данный двумерный элемент α многообразия M (точка S и касательная плоскость в ней) совпал с данным, изометричным α, двумерным элементом α_1 и поверхность располагалась бы по заданную сторону от касательной плоскости.

Если метрика пространства R и погружаемого многообразия M принадлежат классу C^n, $n \geqslant 3$, то поверхность F принадлежит классу $C^{n-1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Причем поверхность F двумерным элементом определяется однозначно.

Здесь также доказательство проводится методом продолжения по параметру:

I. Доказывается существование непрерывного семейства многообразий M_t, содержащее данное многообразие и многообразие M_0, заведомо погружаемое.

Взяв сферу достаточно малого радиуса в R так, чтобы ее гауссова кривизна была больше C, мы получим многообразие M_0. Изометрично погрузим M_0 и M в пространство постоянной кривизны C. Из теоремы Александрова о погружении и теоремы Погорелова о регулярности выпуклых поверхностей с регулярной метрикой гауссовой кривизны больше C следует, что M_0 и M реализуются в односвязной пространственной форме постоянной кривизны C замкнутыми регулярными выпуклыми поверхностями F_0 и F. Соединяют их семейством регулярных замкнутых выпуклых поверхностей. Им отвечают метрики многообразий M_t кривизны больше C.

II. Доказывается, что если многообразие M_t погружаемо, то близкие к нему многообразия семейства также погружаемы.

Сначала А.В. Погорелов изучил бесконечно малые изгибания регулярных поверхностей в римановом пространстве. Уравнения бесконечно малых изгибаний имеют вид

$$D_i\xi_j + D_j\xi_i = 0, \qquad i,j = 1,2,$$

где через D_i обозначают ковариантную производную, ξ_i — ковариантные компоненты поля бесконечно малых изгибаний. Если взять на поверхности параметризацию, при которой вторая квадратичная форма имеет вид

$$II = \nu((du^1)^2 + (du^2)^2),$$

то уравнения бесконечно малых изгибаний примут вид

$$\begin{cases} \frac{\partial\xi_1}{\partial u^1} - \frac{\partial\xi_2}{\partial u^2} - (\tilde\Gamma^\alpha_{11} - \tilde\Gamma^\alpha_{22})\xi_\alpha = 0, \\ \frac{\partial\xi_1}{\partial u^2} + \frac{\partial\xi_2}{\partial u^1} - 2\tilde\Gamma^\alpha_{12}\xi_\alpha = 0, \end{cases}$$

где $\tilde\Gamma^\alpha_{ij}$ — символы Кристоффеля поверхности. Будем рассматривать деформации, когда точка $P_0 \in F$ закреплена, то есть $\xi(P_0) = 0$, и закреплен пучок направлений в касательной плоскости, то есть $d\xi(P_0) = 0$. Верна

Теорема 7 [18, 6]. *Замкнутая выпуклая гомеоморфная сфере поверхность в римановом пространстве, имеющая положительную внешнюю кривизну, закрепленная в одной точке вместе с пучком направлений, является жесткой, то есть не допускает бесконечно малых изгибаний.*

Пусть F — замкнутая, гомеоморфная сфере поверхность с положительной внешней кривизной K в римановом пространстве R. Пусть эта поверхность регулярно деформируется, переходя к моменту t в некоторую поверхность F_t с линейным элементом $ds_t^2 = ds^2 + td\sigma_t^2$, где ds^2 — линейный элемент исходной поверхности. При $t \to 0$ форма $d\sigma_t^2$ стремится к некоторому пределу, однозначно определяемому деформацией поверхности. Поставим обратную задачу. Будем искать поле деформаций поверхности, которая вызывает заданное изменение линейного элемента с точностью до малых (по t) порядка выше первого.

Пусть $\xi = \frac{dv}{dt}$ — компоненты скорости перемещения точек поверхности в начальный момент деформации, где v^i — координаты точки пространства. Если $d\sigma^2 = \sigma_{ij}du^i du^j$ — заданная деформация метрики, то компоненты ξ_1, ξ_2 вектора скорости деформации удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \frac{\partial\xi_1}{\partial u^1} - \frac{\partial\xi_2}{\partial u^2} - (\tilde\Gamma^\alpha_{11} - \tilde\Gamma^\alpha_{22})\xi_\alpha = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}, \\ \frac{\partial\xi_1}{\partial u^2} + \frac{\partial\xi_2}{\partial u^1} - 2\tilde\Gamma^\alpha_{12}\xi_\alpha = \sigma_{12}. \end{cases}$$

Это система дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют обобщенные аналитические функции, изучавшиеся И.Н. Векуа. Используя данную теорию, А.В. Погорелов доказал, что заданное векторное поле ξ существует и оно регулярно. Эти поля использовались в методе последовательных приближений для получения изометрических погружений метрик M_t, близких к погруженной M_{t_0}.

III. Доказывается, что если каждое многообразие M_{t_n} семейства погружаемо и $t_n \to t_0$, то многообразие M_{t_0} погружаемо.

Для доказательства были получены оценки на нормальные кривизны замкнутой выпуклой гомеоморфной сфере поверхности положительной внешней кривизны в регулярном римановом пространстве в зависимости только от метрики поверхности и метрики пространства. Это обеспечивало априорные оценки на вторые производные радиуса-вектора. Оценки на производные более высоких порядков следовали из уравнения изометрического погружения. Из положительности внешней кривизны следовала эллиптичность этого уравнения. Соединением этих этапов и получается доказательство теоремы, которая дает решение обобщенной проблемы Вейля для изометрического погружения в риманово пространство. Проблема была решена А.В. Погореловым в окончательном виде.

Когда решена трудная проблема, то сначала ею восхищаются, затем привыкают, а потом, если теорема не является инструментальной, ее потихоньку забывают. Однако в 1997 году на вручении премии Американского математического общества за работу «Pseudo-holomorphic curves in sympletic manifolds» М. Громов говорил, что идея доказательства существования псевдоголоморфных кривых возникла у него при чтении этой работы А.В. Погорелова.

Насколько я знаю, остался открытым вопрос о регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой в римановом пространстве, если гауссова кривизна поверхности больше секционной кривизны объемлющего риманова пространства.

Алексей Васильевич любил конкретно поставленные проблемы. А.Л. Вернер рассказывал, что, докладывая на семинаре А.Д. Александрова в г. Ленинграде, А.В. Погорелов неоднократно говорил:«Вы, Александр Данилович, ставите проблемы, а я решаю». Правда, после получения А.В. Погореловым Ленинской премии, А.Д. Александров шутя заметил, что, дескать, теоремы доказываем вместе, а премии получаем врозь.

У Алексея Васильевича не было много учеников. Основные его ученики появились, когда был создан отдел геометрии во ФТИНТе АН УССР, и надо было заполнить его вакансии. По-моему, он дал каждому тему, ответ на которую он хорошо знал, и знал, как его получить. В основном, это было улучшение некоторых его результатов. А нянчился с аспирантами Е.П. Сенькин, который в то время переехал из г. Ленинграда в г. Харьков. Последний аспирант А.В. Погорелова защитился в 1970 году.

Моим руководителем по аспирантуре был Е.П. Сенькин — разносторонне талантливый человек, обладавший редким даром: хвалить. (Алексей Васильевич всегда был сдержан на похвалы.) Но, к сожалению, Евгений Поликарпович к тому времени был болен и не мог мне помочь в выборе темы для работы. В 1970 году, когда я был аспирантом первого года, после семинара я догнал Алексея Васильевича и спросил, чем бы он мне посоветовал заниматься. Ответ был следующий: «Хорошо, если бы ты мне это посоветовал». В 1979 году, когда А.В. Погорелову исполнилось 60 лет, я напомнил этот случай и поблагодарил его за то, что он не дал мне некую диссертабельную, но тупиковую задачу, и за то, что верил в меня.

Мне не довелось быть аспирантом Алексея Васильевича и получать от него задачи, но я учился у А.В. Погорелова на семинаре пониманию того, что такое хорошо поставленная задача, что такое хорошая теорема. В течение тридцати с лишним лет я докладывал на его семинаре и всегда с трепетом ожидал оценки Алексея Васильевича.

Будучи студентом 5-го курса, я построил пример бесконечного выпуклого многогранника и луча на нем, сферическое изображение которого имело бесконечную длину. В то время существовала гипотеза, что у внутренней точки кратчайшей есть окрестность, сферическое изображение которой имеет конечную длину. Построенный пример был частичным контрпримером к этой гипотезе. С этим примером в июне 1969 года я поехал на симпозиум по геометрии в целом в г. Петрозаводске. Но организаторы не хотели давать мне время для доклада. Оказалось, что на эту тему был построен пример В.А. Залгаллером, и организаторы думали, что моя работа — плагиат. Потом все устроилось, и мне дали время для доклада. Наверное, я докладывал плохо, и А.В. Погорелов поднялся и повторил мой доклад. На этом симпозиуме произошла моя первая встреча с А.Д. Александровым. Я обратился к нему с некоторым утверждением, которое оказалось неверным, но тем не менее он продолжал беседовать со мной и как-то сказал, что выпуклая геометрия уже кончилась. Это произвело на меня большое впечатление и потом, уже будучи в аспирантуре, я искал задачи вне этой тематики. Кстати сказать, А.Д. Александров с этого времени не обращался к этой тематике, а перешел к занятиям хроногеометрией, школьными учебниками, этикой, философией.

С А.Д. Александровым легче было вести дискуссию, возражать ему, чем с А.В. Погореловым, он был демократичнее. На восьмидесятилетнем юбилее А.В. Погорелова я сказал, что на конференциях он был доступнее, а в Харькове — более величественным.

6. Поверхности ограниченной внешней кривизны

Одна из самых концептуальных работ А.В. Погорелова относится к циклу работ по гладким поверхностям ограниченной внешней кривизны. По моему мнению, эти работы наиболее цитируемы, хотя уже прошло полвека, когда они были выполнены.

А.Д. Александров создал теорию общих метрических многообразий, естественно обобщающих римановы. В частности, он ввел класс двумерных многообразий ограниченной кривизны. Они исчерпывают собой класс всех метризованных двумерных многообразий, в окрестности каждой точки допускающих равномерное приближение римановыми метриками, у которых абсолютные интегральные кривизны (интеграл от модуля гауссовой кривизны) ограничены в совокупности.

Естественно, возник вопрос о классе поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве, несущих такую метрику с сохранением связей метрики и внешней геометрии поверхности. Частично отвечая на этот вопрос, А.В. Погорелов ввел класс C^1-гладких поверхностей с требованием ограниченности площади сферического изображения с учетом кратности покрытия в некоторой окрестности каждой точки поверхности. Такие поверхности называются поверхностями ограниченной кривизны.

Было введено понятие регулярной точки поверхности, которые, в свою очередь, подразделяются на эллиптические, гиперболические, параболические и точки уплощения в зависимости от характера пересечения касательной плоскости с поверхностью. На поверхности ограниченной кривизны любые две точки, лежащие в достаточно малой окрестности, можно соединить спрямляемой кривой, которая расположена на поверхности. Поэтому на поверхности можно определить многообразие с внутренней метрикой. Было доказано, что оно является многообразием ограниченной внутренней кривизны. Установлена связь между внутренней и внешней кривизнами поверхности.

Для случая регулярных поверхностей теорема Гаусса о сферическом изображении устанавливает связь между интегральной кривизной произвольной области на поверхности и площадью ее сферического изображения. А.В. Погорелов доказал, что на поверхности ограниченной внешней кривизны для любого борелевского множества H внутренняя кривизна $\omega(H) = \sigma(H)$, где $\sigma(H)$ — площадь сферического изображения с учетом кратности покрытия. Внутренняя кривизна $\omega(P)$ для открытых множеств G определена как $\omega(G) = \omega^+(G) - \omega^-(G)$, где положительной $\omega^+(G)$ (отрицательной $\omega^-(G)$) кривизной называется точная верхняя (точная нижняя с обратным знаком) грань положительных (отрицательных) сумм избытков попарно не перекрывающихся треугольников в G.

Есть также очень тесная связь между внутренней геометрией поверхности и ее внешней формой: полная поверхность с ограниченной внешней кривизной и неотрицательной внутренней кривизной (не равной нулю) есть либо замкнутая выпуклая поверхность, либо бесконечная выпуклая поверхность, полная поверхность с нулевой внутренней и ограниченной внешней кривизной является цилиндром.

Первая работа А.В. Погорелова по поверхностям ограниченной внешней кривизны была опубликована в 1953 году [19]. Но в 1954 г. Дж. Нэш опубликовал работу о C^1-изометричных погружениях, которая была улучшена Н. Кейпером в 1955 году. Из этих работ следовало, что риманова метрика, заданная на двумерном многообразии, при весьма общих предположениях, допускает реализацию на гладкой класса C^1 поверхности трехмерного евклидова пространства. Более того, эта реализация осуществляется так же свободно, как топологическое погружение в пространство многообразия, на котором задана метрика. В частности, из этих работ следует возможность изометрического преобразования единичной сферы в гладкую класса C^1 поверхность сколь угодно малого диаметра; следует также существование в трехмерном евклидовом пространстве замкнутой гладкой C^1 поверхности без самопересечений, гомеоморфной тору и локально изометричной плоскости [20].

Отсюда ясно, что для поверхностей класса C^1, даже с хорошей внутренней метрикой, сохранить связи между внутренней и внешней кривизной невозможно. И тогда, когда поверхность класса C^1 несет регулярную метрику положительной гауссовой кривизны, не следует локальная выпуклость поверхности.

Все это подчеркивает естественность класса поверхностей ограниченной внешней кривизны, введенного Алексеем Васильевичем. Это, наверное, самый глубокий и оригинальный цикл его работ, который является сплавом теории меры и блестящих синтетических геометрических конструкций.

7. Многомерная проблема Минковского и многомерное уравнение Монжа–Ампера

Многие вопросы геометрии в целом в их аналитическом истолковании приводят к вопросам существования и единственности решений дифференциальных уравнений, в частности, к уравнению Монжа–Ампера. При этом геометрические результаты о существовании и единственности решения соответствующих задач можно толковать, как теоремы о разрешимости этого уравнения и единственности его решения.

Пионерское продвижение в изучении свойств решений общего многомерного уравнения Монжа–Ампера. А.В. Погорелов сделал в цикле работ [21–25], опубликованных в 1983–1984 гг., а потом — в монографии [26]. Ранее им были получены результаты, когда в правой части функция f зависит только от координат $x_1, \ldots, x_n$, но не зависит от функции z и ее производных [27].

Уравнением Монжа–Ампера называется уравнение в частных производных вида

$$\det(z_{ij}) = f(z_1, \dots, z_n, z, x_1, \dots, x_n), \;\; f > 0, \tag{3}$$

где $z_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$, $\;z_{ij} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i\, \partial x_j}$.

На выпуклых решениях $z(x_1, \dots, x_n)$ — это уравнение эллиптического типа. Запишем уравнение (3) в форме

$$\theta(z_1, \dots, z_n, z, x_1, \dots, x_n) det||z_{ij}|| = \varphi(x_1, \dots, x_n). \tag{4}$$

Уравнение (4) можно записать в эквивалентной форме

$$\int\limits_m \theta(z_1, \dots, z_n, z, x_1, \dots, x_n) det||z_{ij}|| dx_1 \dots dx_n$$

$$= \int\limits_m \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \tag{5}$$

где m — любое борелевское множество в области G, в которой рассматривается решение z. Если решение $z(x)$ является выпуклой функцией и $f > 0$, то форма $d^2 z$ — положительно определенная. В этом случае в левой части равенства можно перейти от переменных x_i к новым переменным $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, а $x(p)$ — прообраз точки p при отображении. В отличие от дифференциальной формы (4) интегральная форма (5) имеет смысл для любых выпуклых, не обязательно регулярных, функций $z(x)$. В связи с этим вводится понятие обобщенного решения. Именно, выпуклая функция $z(x)$, заданная в области G, называется обобщенным решением уравнения (4), если для любого борелевского множества $m \subset G$ имеет место равенство

$$\int\limits_{m^*} \theta(p_1, \dots, p_n, x_1(p), \dots, x_n(p)) dp_1 \dots dp_n$$

$$= \int\limits_m \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

где $x_1(p), \dots, x_n(p), z(p)$ — координаты той точки гиперповерхности $z = z(x)$, в которой уравнение опорной плоскости имеет вид

$$z = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n + c,$$

а $m*$ — это образ множества m при нормальном отображении. Нормальное отображение ставит в соответствие точке $x \in G$ точку p с координатами p_i, которые являются угловыми коэффициентами в уравнении опорной гиперплоскости гиперповерхности $z = z(x)$ в точке $(x, z(x))$.

Понятие обобщенного решения восходит к А.Д. Александрову. При естественных требованиях на функции φ, θ доказывается существование обобщенного решения уравнения (4). Для двумерного случая при $\theta = 1$ это было доказано А.В. Погореловым, а в общем случае — А.Д. Александровым. Позднее Алексеем Васильевичем было доказано существование решения задачи Дирихле и принцип максимума для обобщенных решений уравнения Монжа–Ампера при $\theta_z \leqslant 0$, который обеспечивает единственность решения задачи Дирихле. Аналогичные проблемы были рассмотрены им для уравнения Монжа–Ампера, заданного на сфере.

Обычной кривизной выпуклой гиперповерхности на множестве M называется мера сферического изображения множества M. Вместо обычной кривизны вводится условная кривизна по формуле

$$\Omega(M) = \int\limits_{m^*} \theta(p, z, x) dp, \quad dp = dp_1 \dots dp_n,$$

где интегрирование производится по множеству m^* — нормальному изображению множества M.

Для доказательства существования обобщенного решения уравнения Монжа–Ампера сначала доказывается существование выпуклых многогранников, все вершины которых проектируются в заданные точки B_i и условные кривизны в этих вершинах равны заданным положительным числам μ_i. Далее предельным переходом доказывается существование выпуклой гиперповерхности $F : z = z(x)$, заданной над строго выпуклой областью $x \in G$, условная кривизна которой на любом борелевском множестве $m \subset F$ равна значению функции $\mu(\overline{m})$ на проекции этого множества $\overline{m}$ в гиперплоскости $z = 0$. А μ — неотрицательная, вполне аддитивная, ограниченная функция борелевских множеств, заданная в области G. Для уравнения Монжа–Ампера

$$\mu(\overline{m}) = \int\limits_{\overline{m}} \varphi(x) dx.$$

Если функция $\theta(p, z, x)$, определяющая условную кривизну, строго убывает по z, то выпуклая гиперповерхность $z = z(x)$ однозначно определена своим краем и условной кривизной на всех борелевских множествах. Из этих геометрических результатов следуют существование и единственность обобщенных решений уравнения Монжа–Ампера. Но в случае, когда функции θ, φ — регулярные, пока что мы не имеем никакой информации о регулярности решения. Доказательство регулярности решения сводится к доказательству регулярности замкнутой выпуклой гиперповерхности с заданной условной кривизной. Оно ведется методом непрерывного продолжения по параметру. Здесь необходимо получить априорные оценки на решения уравнения и их производные до третьего порядка включительно, что А.В. Погорелов и сделал. Это была самая трудная часть доказательства, априорные оценки более высокого порядка получаются из уравнения (4).

В результате была доказана

Теорема 8. *Обобщенное решение уравнения Монжа–Ампера (4), в котором θ и φ — регулярные положительные функции, $\theta_z \leqslant 0$, является регулярным в окрестности каждой точки строгой выпуклости решения. Если функции $\theta, \varphi \in C^k$, $k \geqslant 3$, то решение принадлежит классу $C^{k+1,\alpha}$ с любым α, $0 < \alpha < 1$.*

Как-то А.В. Погорелов сказал об уравнении Монжа–Ампера: «Это — великое уравнение, которым я имел честь заниматься».

В решении многих проблем основным было получение априорных оценок для производных решения уравнения эллиптического типа, а именно, первого и второго порядков, а для уравнения Монжа–Ампера — и третьего. Их не удавалось получить, исходя из уравнений. Априорные оценки производных до третьего порядка включительно нужны для того, чтобы для имеющейся последовательности регулярных решений предельное решение было бы класса $C^{2,\alpha}$. А теперь, в случае регулярности коэффициентов, мы можем применить стандартную теорию уравнений эллиптического типа.

Априорные оценки для третьих производных решения уравнения

$$\det(z_{ij}) = \varphi(z_1, \ldots, z_n, z, x_1, \ldots, x_n)$$

А.В. Погорелов получил, основываясь на идее Е. Калаби [31]. Он рассмотрел риманову метрику

$$ds^2 = z_{ij} dx^i dx^j, \tag{6}$$

где $z = z(x_1, \ldots, x_n)$, вычислил лапласиан для скалярной кривизны этой метрики и получил оценки на третьи производные уравнения (6) в случае, когда $\varphi = const > 0$.

Но по времени сначала А.В. Погорелов решил многомерную проблему Минковского. В 1968–1971 гг. он опубликовал цикл статей в ДАН СССР, где доказал априорные оценки для вторых и третьих производных, а методом продолжения по параметру доказал регулярность решения проблемы Минковского для многомерного случая.

Теорема 9 [27, 28]**.** *Пусть задана на единичной гиперсфере Ω положительная, регулярная, класса C^m, $m \geqslant 3$, функция $K(n)$, которая удовлетворяет условию*

$$\int \frac{n}{K(n)} d\omega = 0.$$

Тогда существует (и притом единственная с точностью до параллельного переноса) регулярная, класса $C^{m+1,\alpha}$, $0<\alpha<1$, *выпуклая гиперповерхность с гауссовой кривизной* $K(n)$. *Если функция* $K(n)$ — *аналитическая, то гиперповерхность будет также аналитической.*

Используя эту теорему, А.В. Погорелов доказал регулярность решений уравнения

$$\det(z_{ij})=\varphi(x_1,\ldots,x_n)>0$$

и регулярность обобщеных решений задачи Дирихле [27, 29, 30]. И, как следствие этой теории, доказал, что единственное выпуклое решение $z=x(x_1,\ldots,x_n)$ уравнения

$$\det(z_{ij})=const>0,$$

заданное над всей гиперповерхностью $x_1,\ldots,x_n$, является полиномом второго порядка [31].

Но А.В. Погорелов с середины 50-х годов не публиковал больших статей. Сначала публиковал краткие заметки в ДАН СССР, а потом — в виде небольшой книги. Так и в этом случае. Только в 1975 году в издательстве «Наука» он опубликовал книгу «Многомерная проблема Минковского».

В 1976–1977 гг. С.Ю. Ченг и С.Т. Яо публикуют две статьи [32, 33]. Читая краткие заметки А.В. Погорелова в ДАН СССР, они находят мелкие неточности или неполноту доказательств (а то, что для Алексея Васильевича было делом техники, он просто опускал. Хотя в книге [27] он потом все подробно написал) и фактически объявляют, что у А.В. Погорелова нет полного доказательства и как бы дают свое доказательство регулярности и решения многомерной проблемы Минковского и регулярности решения уравнения Монжа–Ампера

$$\det(z_{ij})=F(x_1,\ldots x_n,z)>0.$$

Но эти доказательства существенным образом используют априорные оценки А.В. Погорелова вторых и третьих производных. И в других леммах существенно используют результаты А.В. Погорелова и ход его доказательства. Кроме того, там изложены результаты А.Д. Александрова и А.В. Погорелова по обобщенным решениям уравнения Монжа–Ампера. Поэтому эти статьи можно считать повторным изложением результатов А.В. Погорелова, а никак не новым доказательством.

Книга А.В. Погорелова «Многомерная проблема Минковского» была переведена на английский язык в 1978 году с прекрасным предисловием Л. Ниренберга. Но нигде в переводе не написано, в каком году вышло русское издание. И к сожалению, часто в цитировании сначала приводится ссылка на работу [32], а потом уже на английское издание книги А.В. Погорелова.

На кэлеровом компактном многообразии M с кэлеровой метрикой

$$ds^2 = g_{j\bar{k}} dz^i d\bar{z}^k$$

имеется замкнутая 2–форма

$$\omega = \frac{i}{2} g_{j\bar{k}} dz^j \wedge d\bar{z}^k.$$

В 1954 году Е. Калаби высказал предположение, что для заданной $(1,1)$ формы

$$\sigma = \frac{i}{2\pi} \tilde{R}_{j\bar{k}} dz^j \wedge d\bar{z}^k,$$

которая представляет первый класс Черна многообразия M, существует кэлерова метрика на M $d\tilde{s}^2$, для которой $\tilde{R}_{j\bar{k}}$ есть тензор Риччи и форма $\tilde{\omega}$ принадлежит тому же классу когомологий, что и форма ω.

Аналитически это предположение сводится к решению комплексного уравнение Монжа–Ампера для вещественной функции φ

$$det\left(g_{i\bar{k}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^j \partial \bar{z}^k}\right) = det(g_{j\bar{k}}) e^{c\varphi} + F,$$

$c = 0$ или 1, с заданной функцией F, удовлетворяющей условию

$$\int\limits_M exp\, F = \mathrm{Vol}\, M$$

в случае $c = 0$.

С.Т. Яо решил эту проблему методом продолжения по параметру, получив прежде всего подходящие априорные оценки вторых и третьих производных. И в своей статье С.Т. Яо пишет, что оценки вторых производных А.В. Погорелова для действительного случая были дня него опорными при получении априорных оценок для комплексного уравнения Монжа–Ампера [34].

С.Т. Яо опубликовал в Интернете препринт "Perspectives on Geometric Analysis", arXiv:math. DG/0602363V2.16. Febr. 2006, где он снова неправильным цитированием замалчивает роль А.В. Погорелова в решении двух фундаментальных проблем: регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой, проблемы Минковского. По поводу первой проблемы он цитирует лишь статью в ДАН за 1961 г., не цитирует статью за 1949 г. и большую статью в Записках Харьковского математического общества за 1950 г. А также цитируется статья Л. Ниренберга за 1953 г., чем создается впечатление, что первое продвижение в решении этой проблемы сделано Л. Ниренбергом.

По поводу проблемы Минковского в двумерном случае он цитирует работу А.В. Погорелова, которая, как следует даже из названия, не имеет отношения к этой теме, но зато она опубликована в 1953 г., а не в 1952 г., когда был опубликован основной результат А.В. Погорелова. Цитируется также работа Л. Ниренберга за 1953 г.

По поводу многомерной проблемы Минковского цитируется лишь статья Ченга-Яо за 1976 г. Нет в списке цитирования А.В. Погорелова и его монографий, переведенных на английский язык. Дальнейшие комментарии излишни.

Результаты А.В. Погорелова в случае многомерного уравнения Монжа–Ампера обобщались в различных направлениях: улучшение регулярности [35], регулярности решения до границы включительно, а не только во внутренних точках области [36], изучение вырожденных уравнений Монжа–Ампера [37], перенесение результатов и оценок на другие классы вполне нелинейных уравнений второго порядка [38]. В частности, для уравнения

$$\det(z_{ij}) = f(x_1, \dots, x_n)$$

в [35] было доказано, что если $f \in C^{\alpha}$, то выпуклое решение вида $z = z(x_1, \dots, x_n)$ в выпуклой области Ω принадлежит классу $C^{2,\alpha}$. Это есть оптимальный результат.

Заметим, что многомерное уравнение Монжа–Ампера находит применение в статистической механике, метеорологии, финансовой математике и в других областях науки [39].

В г. Харькове дифференциальными уравнениями не занимался никто из учеников А.В. Погорелова. Зато результаты Алексея Васильевича в этой области и методы исследования активно использовались в г. Ленинграде, где было защищено много диссертаций в этом направлении. Можно сказать, что математическое влияние А.В. Погорелова было прямо пропорционально расстоянию от г. Харькова.

Перечисленное выше совсем не исчерпывает полученные им результаты. Это и полное решение четвертой проблемы Гильберта, и выяснение условий, когда G — пространства являются финслеровыми, и наоборот. Здесь также получены завершенные результаты [40, 41].

До 1970 года А.В. Погорелов преподавал в Харьковском университете. Результат его преподавания — серия блестящих учебников по аналитической, дифференциальной геометрии и основаниям геометрии. Правда, когда он читал лекции, то временами, думая над решением геометрических проблем, не всегда готовился к лекциям. Он начинал импровизировать и иногда запутывался. Тогда он открывал свой учебник со словами: «Что здесь написано у автора? Очевидно...». Но когда он читал интересующий его спецкурс (я слушал его спецкурс по топологии), то он воодушевлялся, его глаза загорались. Лучше всего у него получались доклады по собственным результатам. Он никогда не увлекался частностями, и ради доступности, красоты, готов был поступиться общностью формулировки. Он держался артистично, и его доклад был прекрасным спектаклем. На семинарах в оценке результатов докладчика у Алексея Васильевича всегда присутствовала оценка красоты и естественности теоремы.

Как главный редактор журнала «Украинский геометрический сборник» А.В. Погорелов ревностно относился к публикации в нем. Помню, как один раз я не подал статьи в журнал «Украинский геометрический сборник», объясняя это тем, что послал статью в другой журнал, и мне нечего сейчас подать. Он сурово посмотрел и произнес: «Сильные мира сего говорят, что тот, кто хочет прославиться, должен прославиться на месте».

Много сил А.В. Погорелов потратил на создание школьного учебника. А началось это следующим образом. Он входил в комиссию по школьному образованию, которую возглавлял А.Н. Колмогоров. Алексей Васильевич был не согласен с учебником, написанным рядом авторов, под общей редакцией А.Н. Колмогорова. И он написал пособие для учителей по элементарной геометрии, где построил школьный курс на основе своей естественной, наглядной системы аксиом. Пособие вышло в 1969 г. и послужило основой для написания школьного учебника. Алексей Васильевич часто повторял:«Мой учебник — это улучшенный учебник Киселева». Но в первых вариантах учебника была трудность, связанная с аксиоматическим подходом. Эта трудность касалась 6-го класса: зачем доказывать очевидные, с детской точки зрения, утверждения. Подход А.В. Погорелова вызвал резкую публичную критику в печати А.Д. Александрова. После усовершенствования учебника эти разногласия были преодолены, и они оставались в крепкой дружбе до последних дней А.Д. Александрова, которого Алексей Васильевич очень любил.

Алексей Васильевич Погорелов был человеком безукоризненной нравственности. Когда заканчивался пятилетний контракт с издательством «Просвещение», издательство «Дрофа» хотело пригласить его к себе, предлагая заманчивые условия. Он отказался, единственным аргументом был следующий: «Мне неудобно перед редактором учебника». Хотя в 90-х годах средства, полученные за издание школьного учебника, были основным источником его существования.

Алексей Васильевич рассказывал, что И.Г. Петровский приглашал его работать в МГУ, И.М. Виноградов — в МИАН, А.Д. Александров — в г. Ленинград. В 1955–1956 гг. он даже провел один год в Ленинграде, но потом возвратился в Харьков. Он предпочитал оставаться в Харькове, вдалеке от суеты. Теоремы он доказывал в г. Харькове, а в г. Москву и г. Ленинград ездил блистать.

Алексей Васильевич долго сохранял научную трудоспособность. И очень переживал, когда началось угасание физических сил. В 1995 году он както сказал: «В моем возрасте уже не надо заниматься математикой». Ему тогда было 76 лет. В 1992 году на восьмидесятилетии А.Д. Александрова я задал какой-то вопрос по геометрии М. Берже. Он ответил, что уже стар и не занимается геометрией. Ему было в то время 65 лет. Однако именно в этом возрасте А.В. Погорелов получил завершающие результаты по многомерному уравнению Монжа–Ампера.

А.В. Погорелов соединял в себе гениальность и трудолюбие крестьянина: не умел не работать. Эти качества воспитали в нем его родители — Василий Степанович и Екатерина Ивановна. На пятидесятилетнем юбилее А.В. Погорелова Наум Ильич Ахиезер низко поклонился его родителям за воспитание сына.

А.В. Погорелов был внешне красивый человек с благородной душой. Он с удовольствием фотографировался, когда приходили фотокорреспонденты и делал это артистично. Он обладал хорошим чувством юмора. Я как-то раз зашел к Алексею Васильевичу домой, чтобы решить какой-то вопрос и забыл у него сумку. Я возвратился за ней, извинился за беспокойство. На это Алексей Васильевич слегка иронично заметил: «Ничего, ничего, коль забыл, значит, о чем-то думал». Помню, когда в 1982 году на семидесятилетии А.Д. Александрова попросили спеть его сотрудника А. И. Медяника, у которого замечательный голос, то после окончания песни Алексей Васильевич заметил: «Вы слышали, как поет мой сотрудник? Представляете, как поет начальник!»

Р.Я. Барри, жена Н.В. Ефимова, рассказывала мне, что, когда А.В. Погорелов стал аспирантом Н.В. Ефимова, то по четвергам, в дни прихода Алексея Васильевича на консультацию, Николай Владимирович запретил ей приглашать гостей. Это было нарушено единственный раз: когда В.А. Рохлин уезжал на работу в провинцию (в Иваново или Архангельск — я точно не знаю). И на этой вечеринке Алексей Васильевич пел украинские песни.

А.В. Погорелов был скромным человеком, несмотря на все свои регалии. В 1972 году харьковские геометры летели через Москву в Самарканд на Всесоюзную геометрическую конференцию. Но вылет в Москве задерживался, и мы коротали ночь в зале ожиданий. Будучи депутатом Верховного Совета УССР, А.В. Погорелов мог бы пойти в VIP-зал, но он остался с нами.

Когда в 2000 году Алексей Васильевич переехал в Москву, то избегал вызывать машину из Академии наук, чтобы доехать до МИАНа. Он предпочитал ехать общественным транспортом с многочисленными пересадками. Так как он жил в Новокосино, то это было для него тяжелым испытанием, но он боролся до конца. В Москве он продолжал работать, думать над геометрическими проблемами. И даже из Харькова в Москву Алексей Васильевич перевез чертежную доску, на которой он создавал конструкцию генератора электрического тока, основанного на явлении сверхпроводимости. Алексей Васильевич Погорелов был самородком, ограненным неустанным трудом.

Благодарности. Я сердечно благодарю В.А. Марченко за то, что воодушевил на написание этой статьи, и за критические замечания. Искренне благодарю Ю.Г. Решетняка за внимательное прочтение рукописи и многочисленные поправки.

References

[1] *A.D. Aleksandrov*, Intrinsic Geometry of Convex Surfaces. Gostehizdat, Moscow, 1948. (Russian)

[2] *A.D. Aleksandrov*, Convex Polytopes. Gostehizdat, Moscow, 1950. (Russian)

[3] *N.V. Efimov, V.A. Zalgaller, and A.V. Pogorelov*, Aleksandr Danilovich Aleksandrov (to 50-th Birthday). — *Usp. Mat. Nauk* **17** 1962, 6(108), 171–184. (Russian)

[4] *A.V. Pogorelov*, One Theorem about Geodesic on Closed Convex Surface. — *Mat. Sb.* **18(6)** (1946), №1, 181–183. (Russian)

[5] *A.V. Pogorelov*, Quasigeodesic Lines on Convex Surface. — *Mat. Sb.* **25(67)** (1949), №2, 275–306. (Russian)

[6] *A.V. Pogorelov*, Extrinsic Geometry of Convex Surface. — Nauka, Moscow, 1969. (Russian)

[7] *A.V. Pogorelov*, Rigity of General of Convex Surface. — Izd-vo AN UkrSSR, Kiev, 1951. (Russian)

[8] *Yu.A. Volkov*, Estimation of the Deformation of a Convex Surface as Dependent on the Change of its Inner Metric. — *Dokl. Akad Nauk USSR* **9** (1968), 260–263. (Russian)

[9] *S.N. Bernstein*, Research and Integration of Elliptic Equations. — *Comm. Kharkov Math. Soc.* Kharkov **11** (1910). (Russian)

[10] *A.V. Pogorelov*, On the Regularity of a Convex Surface with a Regular Metric. — *Dokl. Akad. Nauk USSR* **LXVII** (1949), No. 6, 1051–1053. (Russian)

[11] *A.V. Pogorelov*, Regularity of Convex Surface. — *Zap. Mat. Otd. Fiz.-Mat. Fakult. Kharkov Univ.* **XXII** (1950), 5–49. (Russian)

[12] *A.V. Pogorelov*, On the Problem of the Regularity of a Convex Surface with a Regular Metric in Euclidean Space. — *Dokl. Akad. Nauk USSR* **2** (1961), 235–237, 1020–1022. (Russian)

[13] *L. Nirenberg*, The Weyl and Minkowski Problems in Differential Geometry in the Large. — *Comm. Pure Appl. Math.* **6** (1953), 337–394.

[14] *L. Nirenberg*, On Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations and Hölder Continuity. — *Comm. Pure Appl. Math.* **6** (1953), 103–157.

[15] *I.Kh. Sabitov*, The Regularity of Convex Regions with a Metric that is Regular in the Holder Classes. — *Sib. Mat. Zh.* **18** (1976), 907–916. (Russian)

[16] *I.Kh. Sabitov and S.Z. Shefel*, On the Connections between the Smoothness Orders of a Surface and its Metric. — *Sib. Mat. Zh.* **18** (1976), No. 4, 916–925. (Russian)

[17] *A.V. Pogorelov*, Regularity of a Convex Surface with a Regular Given Gauss Curvature. — *Mat. Sb.* **31(73)** (1952), No. 1, 88–103. (Russian)

[18] *A.V. Pogorelov*, Some Questions of Global Geometry in Riemannian Space. Izd-vo. Kharkov Univ., Kharkov, 1957. (Russian)

[19] *A.V. Pogorelov*, Extrinsic Curvature of Smooth Surfaces. — *Dokl. Akad. Nauk USSR* **89** (1953), No. 3, 407–409. (Russian)

[20] *J. Nash*, C^1-Isometric Imbeddings. — *Ann. Math.* **3** (1954), No. 1, 383–396.

[21] *A.V. Pogorelov*, The Dirichlet Problem for the Generalized Solutions of the Multidimensional Monge–Ampére Equation of Elliptic Type. — *Dokl. Akad. Nauk USSR* **270** (1983), No. 2, 285–288. (Russian)

[22] *A.V. Pogorelov*, The Maximum Principle for the Generalized Solutions of the Equations $\theta(\nabla z, z, x) \det ||z_{ij}|| = \varphi(x)$. — *Dokl. Akad. Nauk USSR* **271** (1983), No. 5, 1064–1066. (Russian)

[23] *A.V. Pogorelov*, A Priori Estimates for the Solutions of the Equation $\det ||z_{ij}|| = \varphi(z_1, \dots, z_n, z, x_1, \dots, x_n)$. — *Dokl. Akad. Nauk USSR* **274** (1984), No. 5, 792–794. (Russian)

[24] *A.V. Pogorelov*, The Existence of a Closed Convex Hypersurface with a Prescribed Curvature. — *Dokl. Akad. Nauk USSR* **274** (1984), No. 5, 28–31. (Russian)

[25] *A.V. Pogorelov*, Regularity of the Generalized Solution of the Equations $\det ||u_{ij}|| \theta(\nabla u, u, x) = \varphi(x)$. — *Dokl. Akad. Nauk USSR* **275** (1984), No. 1, 26–28. (Russian)

[26] *A.V. Pogorelov*, Multidimensional Monge–Ampere Equation. — Nauka, Moscow, 1988. (Russian). (Engl. transl: Rev. Math. Math. Phys. V. 10, P. 1, 1995).

[27] *A.V. Pogorelov*, The Minkovski Multidimensional Problem. Nauka, Moscow, 1975. (Russian)

[28] *H. Levy*, On Differential Geometry on the Large. I. *Trans. Am. Math. Soc.* **43** (1938), No. 2, 258–270.

[29] *A.V. Pogorelov*, An a Priori Estimate for the Principal Radii of Curvature of a Closed Convex Hypersurface in Terms of their Mean Values. — *Dokl. Akad. Nauk USSR* **10** (1969), No. 3, 516–518. (Russian)

[30] *A.V. Pogorelov*, The Existence of a Closed Convex Hypersurface with a Prescribed Function of the Principal Radii of the Curvature. — *Dokl. Akad. Nauk USSR* **193** (1971), No. 3, 526–528. (Russian)

[31] *E. Calabi*, Improper Affine Hyperspheres of Convex Type and a Generalizations of Theorems by K. Jördens. — *Michigan Mat. J.* **5** (1958), No. 2, 105–126.

[32] *S.Yu. Cheng and S.T. Yau*, On the Regularity of the Solution of the n-Dimensional Minkowski Problem. — *Comm. Pure Appl. Math.* **XXIX** (1976), No. 5, 495–516.

[33] *S.Yu. Cheng and S.T. Yau*, On the Regularity of the Monge–Ampere Equation $\det \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F(x,u)$. — *Comm. Pure Appl. Math.* **XXX** (1977), No. 1, 41–68.

[34] *S.Yu. Cheng and S.T. Yau*, On the Ricci Curvature of a Compact Kähler Manifold and the Complex Monge–Ampere Equation. — *Comm. Pure Appl. Math.* **XXXI** (1978), No. 3, 339–412.

[35] *L.A. Caffarelli*, A Priori Estimates and the Geometry of the Monge-Ampére Equation. 5-64. IAS/ Park Sity Math. Ser. V. 2. Nonlinear Differential Equations in Differential Geometry. (R. Hardt, M. Wolf, Eds.) AMS, Institute Adv. Study. 1996.

[36] *L.A. Caffarelli, L. Nirenberg, and J. Spruck*, The Dirichlet Problem for Nonlinear Second-Order Elliptic Equations. I. Monge–Ampere Equation. — *Comm. Pure Appl. Math.* **XXXVII** (1984), No. 3, 369–402.

[37] *P. Guan, N.S. Trudinger and X-J, Wang*, The Dirichlet Problem for Degenerate Monge–Ampére Equation. — *Acta Math.* **182** (1999), 87–104.

[38] *W. Sheng, J. Urbas, and X-J. Wang*, Interior Curvature Bounds for a Class of Curvature Equations. — *Duke Math. J.* **123** (2004), No. 2, 235–264.

[39] *L.A. Caffarelli*, Nonlinear Elliptic Theory and the Monge–Ampere Equations. — *Proc. Int. Congr. Math.* **1** (2002), 179–187.

[40] *A.V. Pogorelov*, Fourth Hilbert Problem. Nauka, Moscow, 1974. (Russian)

[41] *A.V. Pogorelov*, Busemann Regular G-Spaces. — *Rev. Math. Math. Phys.* **10** (1998), No. 4, 1–102.

Aleksej Vasil'evich Pogorelov is a mathematician of surprising forse

A.A. Borisenko

Department of Mechanics and Mathematics
V.N. Karazin Kharkov National University
4 Svobody Sq., Kharkov, 61077, Ukraine
E-mail:borisenk@univer.kharkov.ua

Received January 30, 2006

It is described principal mathematical results, obtained by great mathematician A. V. Pogorelov and his life.

Key words: convex surfaces, elliptic differential.

Mathematics Subject Classification 2000: 53C45, 35J60.