Журнал математической физики, анализа, геометрии
2007, т. 3, № 4, с. 448–467

О полных выпуклых решениях уравнений, близких к уравнению несобственной аффинной сферы

В.Н. Кокарев

Самарский государственный университет
ул. Акад. Павлова, 1, Самара, 443011, Россия
E-mail:ko1949@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 22 апреля 2007 г.

Пусть σ_k — сумма всех главных миноров k-го порядка гессиана (z_{ij}) для функции $z(x^1, \ldots, x^n)$. Если функция φ от $(n-1)$-го положительного переменного принадлежит классу $C^{3,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, и достаточно близка к тождественно единичной функции, то всякое полное выпуклое решение $z(x^1, \ldots, x^n)$ уравнения

$$\sigma_n = \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$$

является квадратичным полиномом.

Нехай σ_k — сума всіх головних мінорів k-го порядку гессіану (z_{ij}) для функції $z(x^1, \ldots, x^n)$. Коли функція φ від $(n-1)$-го додатного змінного належить до класу $C^{3,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, і достатньо близька до тотожньо одиничної функції, то кожний повний опуклий розв'язок $z(x^1, \ldots, x^n)$ рівняння

$$\sigma_n = \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$$

є квадратичним поліномом.

Ключевые слова: несобственная аффинная сфера.

Mathematics Subject Classification 2000: 58J05.

В настоящей работе доказывается результат, анонсированный в [1]. В работах [2–4] доказано, что все полные выпуклые решения уравнения Монжа–Ампера $\det(z_{ij}) = 1$, заданного на всей плоскости, являются квадратичными полиномами. Это уравнение возникло при изучении очень интересного класса поверхностей — несобственных аффинных сфер, открытых Г. Чичейкой [5].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Грант № 05-01-00313.

Однако интерес представляют и нелинейные эллиптические уравнения более общего вида, заданные на всей плоскости. Некоторые из них мы рассматриваем в данной статье.

Уравнение $\det(z_{ij}) = 1$ можно записать в виде $\lambda_1, \ldots, \lambda_n = 1$, где λ_i — собственные значения матрицы гессиана (z_{ij}). Естественно поставить вопрос: что можно сказать о полных выпуклых решениях $z(x^1, \ldots, x^n)$ "возмущенного"уравнения

$$\sigma_n = \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}), \tag{1}$$

где $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — элементарные симметрические функции от собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы (z_{ij}), т.е. σ_k есть сумма всех главных миноров k-го порядка матрицы (z_{ij}), а φ — регулярная функция положительных переменных. В статье будет доказана

Теорема. *Пусть функция $\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$ задана в области $\sigma_k > C_n^k(1-\varepsilon)^{k/n}$, $k = 1, \ldots, n-1$, принадлежит классу $C^{3,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, и удовлетворяет в этой области условиям:*

$$1 - \varepsilon \leqslant \varphi \leqslant 1 + \varepsilon, \tag{2}$$

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_i}\right| \leqslant \varepsilon \frac{\varphi}{\sigma_i}, \tag{3}$$

$$\left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j}\right| \leqslant \varepsilon \frac{\varphi}{\sigma_i \sigma_j}, \tag{4}$$

$$\left|\frac{\partial^3 \varphi}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j \partial \sigma_k}\right| \leqslant \varepsilon \frac{\varphi}{\sigma_i \sigma_j \sigma_k}, \tag{5}$$

где $i, j, k = 1, \ldots, n-1$, а $\varepsilon < \dfrac{1}{1210(n-1)^2(n+3)n^6}$. Тогда всякое полное выпуклое решение $z(x^1, \ldots, x^n)$ уравнения (1) является квадратичным полиномом.

1. Обобщение уравнения (1)

При изучении уравнения (1) нам придется выполнять аффинные преобразования координат. При таких преобразованиях координат величина $\det(z_{ij}) = \sigma_n$ умножается на число, что же касается функций $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$, то они даже относительными инвариантами не являются. В связи с этим рассмотрим несколько более общую ситуацию.

Пусть полная выпуклая поверхность Φ и эллиптический параболоид Π заданы в евклидовом пространстве E^{n+1} уравнениями $x^{n+1} = z(x^1, \ldots, x^n)$ и $x^{n+1} = z^0(x^1, \ldots, x^n) = \frac{1}{2}c_{ij}x^i x^j$, соответственно. При суммировании индексы всюду пробегают значения $1,\dots,n$. Обозначим $\dfrac{\partial z}{\partial x^i}=z_i$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^i \partial x^j}=z_{ij}$ и т.д. Через $\tilde\lambda_1,\dots,\tilde\lambda_n$ обозначим теперь экстремумы формы $z_{ij}\xi^i\xi^j$ относительно формы $c_{ij}\xi^i\xi^j$. Они являются корнями уравнения

$$\det(z_{ij}-\tilde\lambda c_{ij})=0. \tag{6}$$

Это уравнение инвариантно при аффинных заменах координат $x^1,\dots,x^n$. Следовательно, и уравнение

$$\tilde\sigma_n=\varphi(\tilde\sigma_1,\dots,\tilde\sigma_{n-1}), \tag{7}$$

где $\tilde\sigma_1,\dots,\tilde\sigma_n$ — элементарные симметрические функции от $\tilde\lambda_1,\dots,\tilde\lambda_n$, инвариантно при аффинных заменах координат. Кроме того, если поверхности Φ и Π одновременно подвергнуть аффинному преобразованию вида $(x^1,\dots,x^{n+1})\to(a^1_i x^i,\dots,a^n_i x^i,x^{n+1})$, то $\tilde\lambda_1,\dots,\tilde\lambda_n$ в соответственных точках поверхности Φ и ее образа будут одинаковы. Чтобы не усложнять вычислений, считаем, что $\det(c_{ij})=1$, а указанные аффинные преобразования и аффинные замены координат $x^1,\dots,x^n$ будем рассматривать только унимодулярные, т.е. с определителем, равным 1. С учетом этого получаем

$$\sigma_k=C^k_n D(\underbrace{z_{ij},\dots,z_{ij}}_{k},c_{ij},\dots,c_{ij}),$$

где D — символ смешанного дискриминанта [6], т.е.

$$\sigma_k=\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant k\\ 1\leqslant j_1<\ldots<j_k\leqslant k}} Z^{j_1\ldots j_k}_{i_1\ldots i_k} C^{\overline{j_1\ldots j_k}}_{\overline{i_1\ldots i_k}}.$$

Здесь $Z^{j_1\ldots j_k}_{i_1\ldots i_k}$ — минор матрицы (z_{ij}), стоящий в строках с номерами $i_1,\dots,i_k$ и столбцах с номерами $j_1,\dots,j_k$, а $C^{\overline{j_1\ldots j_k}}_{\overline{i_1\ldots i_k}}$ — алгебраическое дополнение того минора матрицы (c_{ij}), который стоит в строках и столбцах с теми же номерами. Для простоты обозначим $C^k_n D(\underbrace{z_{ij},\dots,z_{ij}}_{k},c_{ij},\dots,c_{ij})=D^k$. Пусть выпуклая поверхность Φ, являющаяся графиком функции $z(x^1,\dots,x^n)$, удовлетворяет уравнению (7). Сначала для функции $z(x^1,\dots,x^n)$ получим оценки первых и вторых производных.

2. C^2 — оценки решения уравнения (7) в ограниченной области

Так как к функции $z(x^1,\dots,x^n)$ можно прибавлять слагаемые вида $c_i x^i+c$, то без ограничения общности можно считать, что поверхность Φ касается плоскости $x^{n+1} = 0$. Через G_h обозначим область на плоскости $x^{n+1} = 0$, где $z(x^1, \dots, x^n) \leqslant h$. В силу условия (2) матрица (z_{ij}) имеет положительные собственные значения, поэтому поверхность Φ не может быть цилиндром. Следовательно, множество G_h компактно. Пусть d_h — диаметр этого множества.. Оценим первые производные функции $z(x^1, \dots, x^n)$ в области G_1, используя метод работы [4].

Возьмем точку $(x^1, \dots, x^n) \in G_1$ и построим конус C с вершиной в точке $S(x^1, \dots, x^n, z(x^1, \dots, x^n))$, который проектирует пересечение плоскости $x^{n+1} = 2$ с поверхностью Φ. Через Φ_h обозначим часть поверхности Φ, для которой $z(x^1, \dots, x^n) \leqslant h$, а через Φ_h^* и C^* — нормальные изображения Φ_h и C, соответственно, на плоскости переменных $p_1, \dots, p_n$ (см. [4; §5, п. 1]). В силу выпуклости Φ_2 имеем $C^* \subset \Phi_2^*$, следовательно, для объемов получаем неравенство $\mathrm{Vol}(C^*) \leqslant \mathrm{Vol}(\Phi_2^*)$.

Так как высота конуса C не менее 1, а диаметр основания равен d_2, то шар $p_1^2 + \dots + p_n^2 \leqslant 1/d_2^2$ принадлежит C^*. Точка $(p_1, \dots, p_n) = (z_1(x^1, \dots, x^n), \dots, z_n(x^1, \dots, x^n))$ тоже принадлежит C^*. Значит, в C^* лежит конус вращения с радиусом основания $1/d_2$, высотой $|z_i(x^1, \dots, x^n)|$, объемом $\dfrac{|z_i(x^1, \dots, x^n)|\varkappa_{n-1}}{nd_2^{n-1}}$, где $\varkappa_{n-1}$ — объем $(n-1)$-мерного единичного шара. Следовательно, $\mathrm{Vol}(C^*) \geqslant \dfrac{|z_i(x^1, \dots, x^n)|\varkappa_{n-1}}{nd_2^{n-1}}$. Далее

$$\mathrm{Vol}(\Phi_2^*) = \int\limits_{\Phi_2^*} dp_1 \cdots dp_n = \int\limits_{G_2} \frac{\partial(p_1, \dots, p_n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} dx^1 \cdots dx^n = \int\limits_{G_2} \det(z_{ij}) dx^1 \cdots dx^n$$

$$= \int\limits_{G_2} \varphi dx^1 \cdots dx^n \leqslant \frac{(1+\varepsilon) d_2^n \varkappa_n}{2^n},$$

где $\varkappa_n$ — объем n-мерного единичного шара. Из $\mathrm{Vol}(C^*) \leqslant \mathrm{Vol}(\Phi_2^*)$ получаем оценку сверху на$|z_i(x^1, \dots, x^n)|$ для всех точек области G_1. Оценка зависит от ε и d_2 — диаметра сечения поверхности Φ на высоте 2.

Теперь оценим вторые производные решения уравнения (7) в области $G_{1/2}$. Модифицируя прием А.В. Погорелова [7, §5, п. 2, док-во теоремы 5.1], введем в G_1 функцию точки и направления

$$w = (1-z)^s e^{(z_1^2 + \cdots z_n^2)/2} z_{\xi\xi},$$

где индекс ξ означает дифференцирование в направлении ξ, а постоянная $s > 0$ будет выбрана позже. Функция w обращается в нуль на границе области G_1, а во внутренних ее точках для всех направлений $w > 0$. В силу компактности множества G_1 функция w достигает положительного максимума, равного w_0, во внутренней точке O области G_1 для некоторого направления ξ_0. Это направление является главным направлением квадратичной формы d^2z в точке O. Направим оси $x^1, \dots, x^n$ по главным направлениям формы d^2z в точке O, причем ось x^1 пусть имеет направление ξ_0. Тогда в точке O $z_{ij} = 0 (i \neq j)$. В новых координатах уравнение поверхности Φ будет по-прежнему иметь вид (7), но, вообще говоря, с другими c_{ij}. Оставим за этими коэффициентами старые обозначения. По-прежнему, $\det c_{ij} = 1$.

Итак, в точке O функция $w = (1-z)^s e^{(z_1^2+\cdots+z_n^2)/2} z_{11}$ достигает максимума. Следовательно, в этой точке $d(\ln w) = 0, d^2(\ln w) \leqslant 0$. Вычислив, получим в точке O

$$\frac{\partial \ln w}{\partial x^i} = \frac{s z_i}{z-1} + z_i z_{ii} + \frac{z_{11i}}{z_{11}} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 \ln w}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{s z_{ij}}{z-1} - \frac{s z_i z_j}{(z-1)^2} + \sum_\alpha z_\alpha z_{\alpha ij} + \sum_\alpha z_{\alpha i} z_{\alpha j} + \frac{z_{11ij}}{z_{11}} - \frac{z_{11i} z_{11j}}{z_{11}^2}. \tag{9}$$

Продифференцируем (7) в точке O по x^α и дважды по x^1. Поделив результаты почленно на (7) и обозначив $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \sigma_k} = \varphi_k, \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \sigma_k \partial \sigma_l} = \varphi_{kl}$, получим

$$\sum_i \frac{z_{ii\alpha}}{z_{ii}} = \sum_{k,p,q} \frac{\varphi_k}{\varphi} \frac{\partial D^k}{\partial z_{pq}} z_{pq\alpha}, \tag{10}$$

$$\sum_i \frac{z_{ii11}}{z_{ii}} + \sum_{i \neq j} \frac{z_{ii1} z_{jj1}}{z_{ii} z_{jj}} - \sum_{i \neq j} \frac{z_{ij1}^2}{z_{ii} z_{jj}} = \sum_{k,p,q} \frac{\varphi_k}{\varphi} \frac{\partial D^k}{\partial z_{pq}} z_{pq11}$$
$$+ \sum_{k,p,q,r,s} \frac{\varphi_k}{\varphi} \frac{\partial^2 D^k}{\partial z_{pq} \partial z_{rs}} z_{pq1} z_{rs1} + \sum_{k,l,p,q,r,s} \frac{\varphi_{kl}}{\varphi} \frac{\partial D^k}{\partial z_{pq}} \frac{\partial D^l}{\partial z_{rs}} z_{pq1} z_{rs1}. \tag{11}$$

При этом с помощью (3) получаем

$$\left| \sum_k \frac{\varphi_k}{\varphi} \frac{\partial D^k}{\partial z_{ii}} \right| \leqslant \sum_k \frac{\varepsilon \varphi}{\varphi \sigma_k} \frac{\sigma_k}{z_{ii}} = \frac{\varepsilon_1}{z_{ii}}, \quad \varepsilon_1 = (n-1)\varepsilon; \quad \left| \sum_k \frac{\varphi_k}{\varphi} \frac{\partial D^k}{\partial z_{ij}} \right|$$
$$\leqslant \sum_k \left| \frac{\varepsilon \varphi}{\varphi \sigma_k} \sigma_{k-1}^{ij} c_{ij} \right| \leqslant \sum_k \left| \frac{\varepsilon}{\sigma_k} \sigma_{k-1}^{ij} \sqrt{c_{ii} c_{jj}} \right| \leqslant \sum_k \frac{\varepsilon}{\sigma_k} \sqrt{\frac{\sigma_k}{z_{ii}} \frac{\sigma_k}{z_{jj}}} \leqslant \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{z_{ii} z_{jj}}}.$$

Здесь σ_{k-1}^{ij} — элементарная симметрическая функция $(k-1)$-го порядка от $\tilde\lambda_1, \dots, \tilde\lambda_n$ кроме $\tilde\lambda_i, \tilde\lambda_j$.

Аналогично получаем с помощью (3) и (4)

$$\left| \sum_k \frac{\varphi_k}{\varphi} \frac{\partial^2 D^k}{\partial z_{pq} \partial z_{rs}} \right| \leqslant \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{z_{pp} z_{qq} z_{rr} z_{ss}}},$$

$$\left|\sum_{k,l}\frac{\varphi_{kl}}{\varphi}\frac{\partial D^k}{\partial z_{pq}}\frac{\partial D^l}{\partial z_{rs}}\right| \leqslant \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{z_{pp}z_{qq}z_{rr}z_{ss}}}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon(n-1)^2.$$

Умножим (10) на z_α и просуммируем по α. Получим

$$\sum_{\alpha,i}\frac{z_\alpha z_{ii\alpha}}{z_{ii}} - \sum_{\alpha,i,j,k}\frac{\varphi_k}{\varphi}\frac{\partial D^k}{\partial z_{ij}} z_{ij\alpha}z_\alpha = 0. \tag{12}$$

Для элементов матрицы (A_{ij}), где $A_{ii} = \dfrac{1}{z_{ii}} - \sum_k \dfrac{\varphi_k}{\varphi}\dfrac{\partial D^k}{\partial z_{ii}}$, $A_{ij} = \sum_k \dfrac{\varphi_k}{\varphi}\dfrac{\partial D^k}{\partial z_{ij}}$, $i \neq j$, имеем

$$\frac{1-\varepsilon_1}{z_{ii}} \leqslant |A_{ii}| \leqslant \frac{1+\varepsilon_1}{z_{ii}}, \quad |A_{ij}| \leqslant \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{z_{ii}z_{jj}}}, \ i \neq j.$$

Поэтому все ее собственные значения положительны. Значит,

$$z_{11}\sum_{i,j} A_{ij}\frac{\partial^2 \ln w}{\partial x^i \partial x^j} \leqslant 0.$$

С учетом (9) и (12) последнее неравенство дает

$$-\frac{snz_{11}(1+\varepsilon_1)}{1-z} - \sum_{i,j} z_{11}A_{ij}\frac{sz_i z_j}{(z-1)^2} + \sum_i z_{11}z_{ii}^2 A_{ii}$$

$$+\sum_{i,j} z_{11ij}A_{ij} - \sum_{i,j}\frac{A_{ij}z_{11i}z_{11j}}{z_{11}} \leqslant 0. \tag{13}$$

Третье слагаемое в левой части (11) преобразуем

$$\sum_{i\neq j}\frac{z_{ij1}^2}{z_{ii}z_{jj}} = \sum_{(i\neq j)>1}\frac{z_{ij1}^2}{z_{ii}z_{jj}} + \frac{2}{s}\sum_{i>1}\frac{z_{i11}^2}{z_{ii}z_{11}} + (2-\frac{2}{s})\sum_{j>1}\frac{z_{1j1}^2}{z_{11}z_{jj}} \tag{14}$$

и, используя (8), получим

$$\frac{2}{s}\frac{z_{i11}}{z_{ii}z_{11}} = \frac{2}{s}\frac{z_{11}}{z_{ii}}\left(\frac{sz_i}{z-1} + z_i z_{ii}\right)^2 > \frac{2sz_i^2 z_{11}}{(z-1)^2 z_{ii}} + \frac{4z_i^2 z_{11}}{z-1}. \tag{15}$$

Возведем (10) почленно в квадрат, положив $\alpha = 1$, умножим на$(1 + 1/n^2)$ и сложим с (13). Затем из результата вычтем (11). Так как $\sum_i z_{11}z_{ii}^2 A_{ii} >$

$z_{11}^2(1-\varepsilon_1^2)$, то с учетом (14),(15) и оценок на коэффициенты в правых частях (10) и (11) получим неравенство вида

$$-\frac{snz_{11}(1+\varepsilon_1)}{1-z}-\frac{2sz_1^2}{(z-1)^2}+\frac{sz_{11}}{(z-1)^2}\sum_{i,j}(\frac{2\delta_{ij}}{z_{ii}}-A_{ij})z_iz_j$$

$$+z_{11}^2(1-\varepsilon_1)+\frac{4z_{11}}{z-1}\sum_{i>1}z_i^2+\sum_{i,j,k,l}B_{ij,kl}\frac{z_{ij1}z_{kl1}}{\sqrt{z_{ii}z_{jj}z_{kk}z_{ll}}}\leqslant 0. \qquad (16)$$

Матрица $(\frac{2\delta_{ij}}{z_{ii}}-A_{ij})$ имеет положительные собственные значения, поэтому третье слагаемое в (16) неотрицательно. Для коэффициентов $(n^2\times n^2)$ матрицы $(B_{ij,kl})$ получаем следующие оценки:

$$B_{11,11}\geqslant\frac{1}{n^2}-2\varepsilon_2;\quad B_{i1,i1}=B_{1i,1i}\geqslant 1-\frac{1}{s}-2\varepsilon_2,(i>1);$$

$$B_{ij,ij}\geqslant 1-2\varepsilon_2,(i,j>1);\quad 0<B_{ii,jj}\leqslant\frac{1}{n^2}+2\varepsilon_2,(i\neq j);$$

$$|B_{ij,kl}|\leqslant 2\varepsilon_2,\ \text{если упорядоченные пары}(ij),(kl)\text{различны}.$$

При достаточно большом s, например, $s\geqslant n^2$, собственные значения матрицы $B_{ij,kl}$ положительны (см.[8], теорема 7.2.1) и, значит, последнее слагаемое в (16) неотрицательно. Усиливая (16), получаем

$$-\frac{snz_{11}(1+\varepsilon_1)}{1-z}-\frac{2sz_1^2}{(z-1)^2}+z_{11}^2(1-\varepsilon_1)+\frac{4z_{11}}{z-1}\sum_{i>1}z_i^2\leqslant 0.$$

Умножив последнее неравенство на $(1-z)^{2s}e^{z_1^2+\cdots+z_n^2}$ и положив $s=n^2$, получим в точке O неравенство вида

$$(1-\varepsilon_1)w_0^2+Qw_0+R\leqslant 0,$$

где Q и R содержат $(1-z)$ в неотрицательных степенях и зависят также от ε и первых производных функции z. Так как в области G_1 $0\leqslant 1-z\leqslant 1$, то из оценок на первые производные функции z в области G_1 получаем, что Q и R оцениваются через d_2 и ε. Следовательно, w_0 оценивается через эти же величины. Обозначив эту оценку через $w_0(d_2,\varepsilon)$, получаем для всех точек и всех направлений ξ в области G_1

$$(1-z)^{n^2}e^{(z_1^2+\cdots+z_n^2)/2}z_{\xi\xi}\leqslant w_0(d_2,\varepsilon).$$

Отсюда для всех точек и всех направлений в области $G_{1/2}$ получаем

$$z_{\xi\xi}\leqslant 2^{n^2}w_0(d_2,\varepsilon).$$

Очень важно, что оценка может быть выражена только через d_2 и ε вне зависимости от коэффициентов c_{ij}. Это позволит в следующем разделе получить глобальную оценку на вторые производные функции z.

3. Глобальная оценка для вторых производных решения уравнения (7)

Здесь мы используем метод А.В. Погорелова из [4].

Через T_h обозначим пересечение плоскости $x^{n+1} = h$ с выпуклым телом, ограниченным поверхностью Φ. Не ограничивая общности, можно считать, что плоскость $x^{n+1} = 0$ касается поверхности Φ в точке S, а ось x^{n+1} проходит через центр тяжести сечения T_h. Пусть E— n-мерный эллипсоид минимального объема, содержащий T_h, центр которого совпадает с центром тяжести T_h. Подвергнем поверхности Φ и Π унимодулярному аффинному преобразованию χ вида $(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}) \to (\alpha_i^1 x^i, \ldots, \alpha_i^n x^i, x^{n+1})$, переводящему эллипсоид E в шар E'радиуса r, а поверхности Φ и Π— в поверхности Φ' и Π'. Оси $x^1, \ldots, x^n$ можно выбрать так, что это преобразование будет иметь вид $\chi : (x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}) \to (\mu_1 x^1, \ldots, \mu_n x^n, x^{n+1})$. При этом поверхности Φ' и Π' удовлетворяют уравнению (7) с той же функцией φ и для новых коэффициентов c'_{ij} также $\det(c'_{ij}) = 1$. Докажем, что величина h/r^2 ограничена сверху и снизу некоторыми положительными константами, зависящими только от ε.

Для поверхности Φ' введем Φ'_h, G'_h, Φ'^*_h так же, как вводились Φ_h, G_h, Φ^*_h для поверхности Φ в разд. 2. Тогда, как и в разд. 2,

$$\mathrm{Vol}(\Phi'^*_h) = \int\limits_{\Phi'^*_h} dp_1 \ldots dp_n = \int\limits_{G'_h} \det(z_{ij}) dx^1 \ldots dx^n = \int\limits_{G'_h} \varphi dx^1 \ldots dx^n \leqslant (1+\varepsilon) r^n \varkappa_n.$$

Объем нормального изображения конуса, проектирующего шар E' из точки $s' = \chi(S)$ не менее, чем $(h/2r)^n \varkappa_n$. Сравнивая его с $\mathrm{Vol}(\Phi'^*_h)$, получаем $(h/2r)^n \varkappa_n \leqslant (1+\varepsilon) r^n \varkappa_n$ или $h/r^2 \leqslant 2(1+\varepsilon)^{1/n}$.

Подвергнем шар E' гомотетии с коэффициентом $k = 1/n^{3/2}$ относительно его центра. Полученный шар E'' будет содержаться в $T'_h = \chi(T_h)$ [9]. Спроектируем шар E' конусом V из точки $B(0, \ldots, 0, -h)$. Часть поверхности Φ'_h, лежащую внутри этого конуса, обозначим Φ_V. Обозначим нормальные изображения Φ_V и V через Φ^*_V и V^*. Для них имеем $\Phi^*_V \subset V^*$, для объема V^* получаем $\mathrm{Vol}(V^*) = (2hn^{3/2}/r)^n \varkappa_n$. Подвергнем шар E'' гомотетии $H_B^{1/2}$ с коэффициентом $1/2$ относительно точки B. Полученный шар $H_B^{1/2}(E'')$ лежит в плоскости $x^{n+1} = 0$ и содержит проекцию поверхности Φ_V. Поэтому

$$\mathrm{Vol}(\Phi^*_V) \geqslant \int\limits_{H_B^{1/2}(E'')} \det(z_{ij}) dx^1 \ldots dx^n = \int\limits_{H_B^{1/2}(E'')} \varphi\, dx^1 \ldots dx^n \geqslant (1-\varepsilon)(\frac{r}{2n^{3/2}})^n \varkappa_n.$$

Из $\mathrm{Vol}(\Phi^*_V) \leqslant \mathrm{Vol}(V^*)$ получаем оценку снизу на h/r^2: $h/r^2 \geqslant (1-\varepsilon)^{1/n}/4n^3$.

Подвергнем поверхности Φ' и Π' аффинному преобразованию $\nu : (x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}) \to (\sqrt{2}x^1/\sqrt{h}, \ldots, \sqrt{2}x^n/\sqrt{h}, 2x^{n+1}/h)$. В результате получим поверхности $\overline{\Phi}$ и $\overline{\Pi} = \Pi'$, при этом поверхность $\overline{\Phi}$ будет удовлетворять уравнению (7). Композиция $\nu\circ\chi$ наших двух аффинных преобразований плоскость $x^{n+1}=h$ переведет в плоскость $x^{n+1}=2$, при этом сечение поверхности $\overline{\Phi}$ плоскостью $x^{n+1}=2$ будет содержаться в шаре радиуса $\sqrt{2}r/\sqrt{h}$. Из оценки снизу на h/r^2 получаем для диаметра этого сечения $\overline{d}_2$ оценку

$$\overline{d}_2 \leqslant \frac{4\sqrt{2}n^{3/2}}{(1-\varepsilon)^{1/2n}}\,, \tag{17}$$

зависящую только от ε.

Пусть поверхность $\overline{\Phi}$ задается графиком функции $\overline{z}(x^1,\ldots,x^n)$. В соответствующих точках поверхностей Φ и $\overline{\Phi}$ для вторых производных функций $z(x^1,\ldots,x^n)$ и $\overline{z}(x^1,\ldots,x^n)$ имеют место соотношения

$$\mu_i^2\overline{z}_{ii}=z_{ii},\quad i=1,\ldots,n. \tag{18}$$

Запишем эти соотношения для точки S на поверхности Φ и соответствующей ей точки $\overline{S}$ на поверхности $\overline{\Phi}$

$$\mu_i^2\overline{z}_{ii}(\overline{S})=z_{ii}(S),\quad i=1,\ldots,n. \tag{19}$$

Из раздела 2 получаем оценку сверху на $\overline{z}_{ii}(\overline{S})$ через $\overline{d}_2$ и ε, а с учетом (17) эта оценка выражается только через ε. Так как $\overline{z}_{11}\ldots\overline{z}_{nn}\geqslant\det(\overline{z}_{ij})=\varphi\geqslant 1-\varepsilon$ ([10], теорема 8.6.5), то получаем для $\overline{z}_{ii}(\overline{S})$ положительную оценку снизу, зависящую только от ε. Тогда соотношение (19) позволяет оценить коэффициенты μ_i снизу и сверху через ε и $z_{ii}(S)$.

Множество точек плоскости $x^{n+1}=0$, для которых $\overline{z}(x^1,\ldots,x^n)\leqslant 1/2$, обозначим $\overline{G}_{1/2}$. Из результатов разд. 2 следует существование оценки, зависящей от $\overline{d}_2$ (значит только от ε), на $\overline{z}_{ii}$ в области $\overline{G}_{1/2}$. Эта область является образом области $G_{h/4}$ при аффинном преобразовании $\nu\circ\chi$. Возвращаясь к соотношению (18), получаем, что для вторых производных z_{ii} решения $z(x^1,\ldots,x^n)$ уравнения (7) всюду в области $G_{h/4}$ существует оценка сверху. При фиксированном ε она, в конечном счете, может быть выражена только через вторые производные $z_{ii}(S)$. Так как $h>0$ произвольно, то такая оценка имеет место для всех точек поверхности Φ. Отсюда, как и ранее, получается также положительная оценка на z_{ii} снизу.

В силу полноты поверхности Φ и ограниченности z_{ii} сверху имеем, что проекцией поверхности Φ является вся плоскость $x^{n+1}=0$. Это позволит в следующем разделе ввести на всей плоскости $x^{n+1}=0$ специальную метрику.

4. Дифференциальное неравенство для решения уравнения (7)

Запишем уравнение (7) в виде $\tilde{\sigma}_n - \varphi(\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_{n-1}) = 0$. Рассматривая левую часть как функцию от производных z_{ij}, обозначим

$$\frac{\partial(\tilde{\sigma}_n - \varphi)}{\partial z_{ij}} = g^{ij}. \tag{20}$$

Если допускать только аффинные преобразования переменных $x^1, \ldots, x^n$, то величины g^{ij} будут координатами симметричного тензора типа $(0,2)$. Введем метрику на плоскости $x^{n+1} = 0$, взяв g^{ij} в качестве координат контравариантного метрического тензора. Докажем, что эта метрика положительно определенная. Для этого поворотом осей добьемся, чтобы в рассматриваемой точке было $z_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Тогда в этой точке $g^{ij} = \sigma_n A_{ij}$, где матрица (A_{ij}) была введена в разд. 2. Положительная определенность метрики следует из положительности собственных значений матрицы (A_{ij}).

Так как мы допускаем только аффинные преобразования координат, то производные $z_{ij}, z_{ijk}, z_{ijkl}$ являются координатами симметричных ковариантных тензоров соответствующих рангов. Будем поднимать и опускать индексы у тензоров с помощью введенной метрики, в частности,

$$z^i_{ij} = g^{ia} z_{aij}, \quad z^{ijk} = g^{ia} g^{jb} g^{kc} z_{abc}.$$

Рассмотрим инвариант $P = z_{ijk} z^{ijk}$. Очевидно, $P \geqslant 0$. Равенство $P(x) = 0$ возможно лишь в том случае, когда все производные z_{ijk} в точке x обращаются в нуль.

Пусть Δ — оператор Лапласа–Бельтрами относительно введенной метрики, ковариантные производные будем обозначать с помощью запятой. В этом разделе получим инвариантную оценку для $\Delta(\sqrt{P})$.

Имеем (см. [3])

$$\Delta(\sqrt{P}) = \frac{\Delta P}{2P^{1/2}} - \frac{g^{ij} P_{,i} P_{,j}}{4P^{3/2}}, \tag{21}$$

$$\frac{\Delta P}{2} = z^{ijk} \Delta z_{ijk} + z^{ijk,l} z_{ijk,l}. \tag{22}$$

Обозначив $B_{abcijkl} = \frac{1}{2}(z_{abc,i} z_{jkl} - z_{abc} z_{jkl,i})$, получим

$$\frac{2B_{abcijkl} B^{abcijkl}}{P^{3/2}} = \frac{z_{abc,i} z^{abc,i}}{P^{1/2}} - \frac{g^{ij} P_{,i} P_{,j}}{4P^{3/2}} \geqslant 0.$$

Из соотношений (21), (22) и последнего неравенства следует

$$\Delta(\sqrt{P}) \geqslant \frac{z^{ijk} \Delta z_{ijk}}{P^{1/2}} \tag{23}$$

Дифференцируя уравнение $\tilde{\sigma}_n - \varphi(\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_{n-1}) = 0$ по x^k, с учетом (20) получим

$$z_{ijk} g^{ij} = 0. \tag{24}$$

Следовательно, $g^{lq} z_{iql,jk} = 0$. Тогда

$$\Delta z_{ijk} = g^{lq} z_{ijk,lq} = g^{lq}(z_{ijl,kq} - z_{ijl,qk}) + g^{lq}(z_{ijl,q} - z_{iql,j})_{,k} + g^{lq}(z_{ijk,l} - z_{ijl,k})_{,q}.$$

Вычисляя, получаем

$$\begin{aligned} z^{ijk}\Delta z_{ijk} = z^{ijk} g^{lq} \Big(& -5 z_{ijh}\Gamma^h_{qp}\Gamma^p_{kl} + 6 z_{ihl}\Gamma^h_{kp}\Gamma^p_{qj} - z_{ijh}\Gamma^h_{kp}\Gamma^p_{ql} - 2 z_{hjl}\Gamma^h_{qp}\Gamma^p_{ki} \\ & + 4 z_{hqp}\Gamma^h_{ij}\Gamma^p_{ik} - 4 z_{phk}\Gamma^h_{jl}\Gamma^p_{iq} - 2 z_{hjlk}\Gamma^h_{iq} - z_{ijhk}\Gamma^h_{lq} + 3 z_{hqlk}\Gamma^h_{ij} \\ & -3 z^h_{jk}\left(\frac{1}{2}\partial_{lq} g_{ih} - \Gamma^a_{il}\partial_q g_{ah}\right) + 2 z^h_{jl}\left(\frac{1}{2}\partial_{ik} g_{qh} - \Gamma^a_{qi}\partial_k g_{ah}\right)\Big). \end{aligned} \tag{25}$$

Здесь Γ^k_{ij} — символы Кристоффеля для введенной метрики. Так как P — инвариант, то для оценки $\Delta(\sqrt{P})$ можно сделать унимодулярную замену координат $x^1, \ldots, x^n$, чтобы стало $c_{ij} = \delta_{ij}$ и в рассматриваемой точке x $z_{ij} = 0$ при $i \neq j$. В результате в точке x получим $\tilde{\lambda}_i = z_{ii}$, $i = 1, \ldots, n$, следовательно,

$$g^{ii} = \frac{\sigma_n}{z_{ii}} - \sum_k \varphi_k \sigma^i_{k-1},$$

где σ^i_{k-1} — $(k-1)$-я элементарная симметрическая функция от $z_{11}, \ldots, z_{nn}$, за исключением z_{ii}, $\sigma^i_0 = 1$,

$$g^{ij} = 0, i \neq j.$$

Тогда в точке x получаем

$$\frac{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon_1)}{z_{ii}} \leqslant g^{ii} \leqslant \frac{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon_1)}{z_{ii}}. \tag{26}$$

В силу диагональности метрики в точке x для всех i, j, k

$$P \geqslant z^2_{ijk} g^{ii} g^{jj} g^{kk}, \quad P \geqslant (z^k_{ij})^2 g^{ii} g^{jj} g_{kk}, \quad P \geqslant (z^{ijk})^2 g_{ii} g_{jj} g_{kk}$$

(без суммирования). Поэтому

$$|z_{ijk}| \leqslant \left(\frac{P}{g^{ii} g^{jj} g^{kk}}\right)^{1/2}, |z^k_{ij}| \leqslant \left(\frac{P}{g^{ii} g^{jj} g_{kk}}\right)^{1/2}, |z^{ijk}| \leqslant \left(\frac{P}{g_{ii} g_{jj} g_{kk}}\right)^{1/2}. \tag{27}$$

Из тождества $\partial_r g_{lj} = -\partial_r g^{ik} g_{ij} g_{kl}$ в силу диагональности метрики в точке x получим при $l \neq j$

$$\partial_r g_{lj} = \left(\frac{\sigma_n z_{ljr}}{z_{ll} z_{jj}} - \sum_k \varphi_k z_{ljr} \sigma^{lj}_{k-2}\right) g_{jj} g_{ll}.$$

Это можно записать в виде

$$\partial_r g_{lj} = \varepsilon_{ljr} z_{ljr}, \quad |\varepsilon_{ljr} - 1| \leqslant 6\varepsilon_1; \tag{28}$$

здесь величины ε_{ljr} не зависят от r.

Далее

$$\partial_r g^{jj} = \frac{1}{z_{jj}} \sum_{i \neq j} \frac{\sigma_n z_{iir}}{z_{ii}} - \sum_{k,i} z_{iir} \varphi_k \sigma_{k-2}^{ij} - \sum_{k,l,i} z_{iir} \varphi_{kl} \sigma_{k-1}^{j} \sigma_{l-1}^{i}. \tag{29}$$

Из (24) в точке x получаем $\frac{1}{z_{jj}} z_{iir} g^{ii} = 0$, т.е.

$$\frac{1}{z_{jj}} \left(\sum_i \frac{\sigma_n z_{iir}}{z_{ii}} - \sum_{k,i} \varphi_k \sigma_{k-1}^{i} z_{iir} \right) = 0.$$

Складывая это равенство почленно с (28), с учетом того что $\partial_r g_{jj} = - \partial_r g^{jj} g_{jj}^2$ (без суммирования), после выкладок получим

$$\partial_r g_{jj} = \varepsilon_{jjr} z_{jjr} + \tilde{\varepsilon}_{jjr}, \quad |\tilde{\varepsilon}_{jjr}| \leqslant \varepsilon_2 (n+1) \left(\frac{P}{g^{jj} g^{jj} g^{rr}} \right)^{1/2}, \tag{30}$$

где ε_{jjr} такое же, как в (28).

С помощью соотношения (29) $\partial_r g_{jj}$ также можно записать в виде

$$\partial_r g_{jj} = - \sum_i \frac{\partial^2 (\sigma_n - \varphi)}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} z_{iir} g_{jj}^2. \tag{31}$$

Дифференцируя (24) по x^r в точке x, получаем $g^{ii} z_{iikr} = - z_{ljk} \partial_r g^{lj}$. А так как

$$|\partial_r g^{lj}| \leqslant (1 + 6\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2) \left(\frac{P}{g_{ll} g_{jj} g^{rr}} \right)^{1/2},$$

то из $n^2 (1 + 6\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2) < 2n^2$ имеем

$$|g^{ii} z_{iikr}| \leqslant 2n^2 \frac{P}{(g^{kk} g^{rr})^{1/2}}. \tag{32}$$

В силу диагональности метрики в точке x

$$\partial_{rp} g_{jl} = g_{jj} g_{ll} (- \partial_{rp} g^{jl} + \partial_r g^{il} \partial_p g^{ij} g_{ii} + \partial_r g^{ij} \partial_p g^{il} g_{ii}). \tag{33}$$

Так как при $i \neq k$

$$\partial_{rp} g^{ik} = - \frac{\partial^2 (\sigma_n - \varphi)}{\partial \lambda_i \partial \lambda_k} z_{ikrp} - \sum_s \frac{\partial^3 (\sigma_n - \varphi)}{\partial \lambda_i \partial \lambda_k \partial \lambda_s} (z_{ikr} z_{ssp} + z_{ikp} z_{ssr}),$$

а при $\varepsilon = 0$ все третьи производные в выражении $\partial_{rp} g_{jl}$ исчезают, то все они оцениваются величиной $\dfrac{(n-1)\varepsilon_2(1+\varepsilon)^3(1+\varepsilon_1)^3 P}{(g^{jj}g^{ll}g^{rr}g^{pp})^{1/2}}$. Использовав соотношение $(n-1)(1+\varepsilon)^3(1+\varepsilon_1)^3 < n$, при $i \neq k$ получим

$$\partial_{rp} g_{ik} = \varepsilon_{ikrp} z_{ikrp} + \tilde{\varepsilon}_{ikrp}, \quad |\tilde{\varepsilon}_{ikrp}| \leqslant \frac{n\varepsilon_2 P}{(g^{rr}g^{pp}g^{jj}g^{ll})^{1/2}}. \tag{34}$$

Здесь $\varepsilon_{ikrp} = \varepsilon_{ikr}$ из формулы (28). Далее

$$\partial_{rp} g^{jj} = \sum_i \frac{\partial^2(\sigma_n - \varphi)}{\partial\lambda_i \partial\lambda_j} z_{iirp} - \sum_{s,t} \frac{\partial^3(\sigma_n - \varphi)}{\partial\lambda_j \partial\lambda_s \partial\lambda_t} z_{stp} z_{str}.$$

Отсюда и из (33), используя те же соображения, получаем

$$\partial_{rp} g_{jj} = -g_{jj}^2 \sum_i \frac{\partial^2(\sigma_n - \varphi)}{\partial\lambda_i \partial\lambda_j} z_{iirp} + \tilde{\varepsilon}_{jjrp}, \tag{35}$$

где $\tilde{\varepsilon}_{jjrp}$ оценивается так же, как в (34). Теперь будем оценивать слагаемые в правой части (25), содержащие четвертые производные функции z. Из (28), (31), (34), (35) получаем

$$z^{ijk} g^{lq}(-2z_{hjlk}\Gamma^h_{iq} + z^h_{jl}\partial_{ik} g_{qh}) = z^{ijk} g^{ll} g^{hh} z_{ilh} \tilde{\varepsilon}_{lhjk},$$

а использовав еще (27) —

$$|z^{ijk} g^{lq}(-2z_{hjlk}\Gamma^h_{iq} + z^h_{jl}\partial_{ik} g_{qh})| \leqslant n^6 \varepsilon_2 P^2. \tag{36}$$

Далее

$$g^{lq}(3z_{hqlk}\Gamma^h_{ij} - \frac{3}{2} z^h_{ji}\partial_{lq} g_{kh}) = \frac{3}{2} g^{ll} g^{hh} z_{ijh} \left(z_{llhk}(2\varepsilon_{ihj} - \varepsilon_{ijh} - \varepsilon_{ihll}) - \tilde{\varepsilon}_{khll} \right).$$

Отсюда, используя (27), (28), (32) и то, что $\tilde{\varepsilon}_{khll}$ не зависит от l, получаем оценку

$$|z^{ijk} g^{lq}(3z_{hqlk}\Gamma^h_{ij} - \frac{3}{2} z^h_{jk}\partial_{lq} g_{ih})| \leqslant 72 n^7 \varepsilon_1 P^2 + \frac{3}{2} n^6 \varepsilon_2 P^2. \tag{37}$$

Так как $P_{,h} = 2z^{ijk} z_{ijk,h} = 2z^{ijk}(z_{ijkh} - 3z_{pjk}\Gamma^p_{ih})$, то в точке x

$$z^{ijk} g^{lq} z_{ijkh} \Gamma^h_{lq} = (\frac{1}{4} P_{,h} + \frac{3}{2} z_{pjk}\Gamma^p_{ih} z^{ijk}) g^{hh} g^{ll} z_{llh}(2\varepsilon_{lhl} - \varepsilon_{llh}).$$

Как и ранее, получаем

$$z_{pjk}\Gamma^p_{ih} z^{ijk} g^{hh} g^{ll} z_{llh}(2\varepsilon_{lhl} - \varepsilon_{llh})| \leqslant 18 n^6 P^2 \varepsilon_1.$$

Используя неравенство Коши для каждой пары индексов $h, l = 1, \dots, n$, получим

$$|P_{,h} g^{hh} g^{ll} z_{llh}(2\varepsilon_{lhl} - \varepsilon_{llh})| \leqslant \frac{nP_{,h}^2 g^{hh}}{\delta P} + 18^2 \delta n^2 \varepsilon_1^2 P^2,$$

где δ — любое положительное число. Заметив, что в силу диагональности метрики в точке x $\frac{P_{,h}^2 g^{hh}}{4P} = |\mathrm{grad}\sqrt{P}|^2$, запишем оценку

$$|z^{ijk} g^{lq} z_{ijkh} \Gamma_{lq}^h| \leqslant 27n^6 \varepsilon_1 P^2 + 81\delta n^2 \varepsilon_1^2 P^2 + \frac{n|\mathrm{grad}\sqrt{P}|^2}{\delta}. \tag{38}$$

Теперь можно считать, что в правой части (25) осталось $57n^6$ слагаемых типа $z^{ijk} g^{ll} z_{ijh} \partial_h g_{lp} \partial_p g_{kl} g^{hh} g^{pp}$, каждое из которых содержит производные функции z не выше третьего порядка. Используя (24), (27)–(29), получаем соотношение

$$\begin{aligned} & z^{ijk} g^{lq}(-5z_{ijh}\Gamma_{qp}^h \Gamma_{kl}^p + 6z_{ihl}\Gamma_{kp}^h \Gamma_{qj}^p - z_{ijh}\Gamma_{kp}^h \Gamma_{ql}^p - 2z_{hjl}\Gamma_{qp}^h \Gamma_{ki}^p \\ & +4_{hqp}\Gamma_{ij}^h \Gamma_{lk}^p - 4z_{phk}\Gamma_{jl}^h \Gamma_{iq}^p + 3z_{jk}^h \Gamma_{il}^a \partial_q g_{ah} - 2z_{jl}^h \Gamma_{qi}^a \partial_k g_{ah}) \\ & \geqslant \frac{1}{4}(3z^{ijk} z_{ij}^s z_{lsq} z_k^{lq} - 2z^{ijk} z_i^{sq} z_{lsk} z_{qj}^l) - 57(20n^6 \varepsilon_1 + 4n^6 \varepsilon_2)P^2. \end{aligned} \tag{39}$$

Введем двухвалентный и четырехвалентный тензоры с координатами P_{ik} и P_{ijkl} формулами

$$P_{ik} = z_{hi}^j z_{jk}^h, \quad P_{ijkl} = z_{il}^a z_{ajk} - z_{ik}^a z_{ajl}.$$

Имеют место соотношения (см. [3]):

$$g^{ik} P_{ik} = P, \quad P_{ik} P^{ik} \geqslant \frac{P^2}{n}, \quad P_{ijkl} P^{ijkl} \geqslant \frac{4}{n-2} P_{ik} P^{ik} - \frac{2P^2}{(n-1)(n-2)},$$

$$P_{ijkl} P^{ijkl} + P_{ik} P^{ik} = 3z^{ijk} z_{ij}^s z_{lsq} z_k^{lq} - 2z^{ijk} z_i^{sq} z_{lsk} z_{qj}^l.$$

Следовательно,

$$3z^{ijk} z_{ij}^s z_{lsq} z_k^{lq} - 2z^{ijk} z_i^{sq} z_{lsk} z_{qj}^l \geqslant \frac{n+1}{n(n-1)} P^2. \tag{40}$$

Обозначив для краткости

$$A = \frac{n+1}{4n(n-1)} - (72n^7 + 1167n^6 + 81\delta n^2)\varepsilon_1 - 230,5n^6 \varepsilon_2, \tag{41}$$

из (23), (25), (36)–(41) получаем неравенство

$$\Delta\sqrt{P} \geqslant AP^{3/2} - \frac{n|\mathrm{grad}\sqrt{P}|^2}{\delta P^{1/2}}. \tag{42}$$

Это неравенство выполняется в любой точке x, где $P(x) \neq 0$, с любым $\delta > 0$ и является инвариантным при аффинных преобразованиях координат $x^1, \dots, x^n$.

5. Доказательство теоремы о полных выпуклых решениях уравнения (7)

Заметим, что случай $c_{ij} \neq \delta_{ij}$ не является более общим по сравнению с $c_{ij} = \delta_{ij}$, т.к. сводится к нему аффинным преобразованием координат $x^1, \ldots, x^n$. Нам потребовалось рассмотреть случай, когда $c_{ij}\xi^i\xi^j$ — произвольная положительно определенная форма, для того, чтобы получить глобальные оценки на вторые производные функции $z(x)$. Произвольность коэффициентов c_{ij} использовалась для оценок коэффициентов μ_i из (19). Далее считаем, что $x^1, \ldots, x^n$ — прямоугольные декартовы координаты.

Пусть $z(x)$ — полное выпуклое решение уравнения (1). Если введенный в разд. 4 инвариант P во всех точках равен нулю, то все третьи производные функции $z(x)$ тождественно равны нулю и $z(x)$ — квадратичный полином. Предположим, что существует точка O, где $P(O) \neq 0$. Докажем, что вместе с неравенством (42) это приведет к противоречию.

Обозначим $\sqrt{P(O)} = 2a$ и построим положительную функцию $v(x)$ со свойствами:

1) функция v определена в открытой, содержащей точку O области Σ с компактным замыканием;

2) $v(O) = a$;

3) $\Delta v \leqslant (A-H)v^3 + HP^{3/2} - 2n|\mathrm{grad} v|^2/(\delta v) + n|\mathrm{grad} v|^2/(\delta\sqrt{P})$, где A, δ те же, что в неравенстве (42), положительные числа δ и H таковы, что $A - H > 0$, а если $P(x) = 0$, то считаем, что правая часть последнего дифференциального неравенства в точке x принимает значение $+\infty$;

4) $v(x) \to +\infty$ при $x \to \partial\Sigma$.

Если функция $v(x)$ с указанными свойствами существует, то функция $\sqrt{P(x)} - v(x)$ достигает максимума в точке $\tilde{x} \in \Sigma$. В этой точке $\mathrm{grad}(\sqrt{P} - v) = 0$, значит, $\mathrm{grad}\sqrt{P}(\tilde{x}) = \mathrm{grad} v(\tilde{x})$. Кроме того, $\sqrt{P(\tilde{x})} - v(\tilde{x}) \geqslant a$, поэтому $\sqrt{P\tilde{x})} > v(\tilde{x}) > 0$. Следовательно, в точке $\tilde{x}$

$$\Delta v \leqslant (A-H)v^3 + HP^{3/2} - \frac{n|\mathrm{grad}\sqrt{P}|^2}{\delta\sqrt{P}}.$$

Вычитая из (42) последнее неравенство, получим в точке $\tilde{x}$

$$\Delta(\sqrt{P} - v) \geqslant (A-H)(P^{3/2} - v^3) > 0.$$

Противоречие с тем, что в этой точке функция $\sqrt{P(x)} - v(x)$ достигает максимума.

Приступим к построению функции $v(x)$ со свойствами 1)–4).

Пусть $B > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $c_0 > 0$ — некоторые константы. Рассмотрим на положительной полуоси t обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'' + \frac{B}{t}y' + \frac{y'^2}{\varepsilon_0 y} = c_0 y^3 \tag{43}$$

с начальными условиями

$$y(0) = a, \qquad y'(0) = 0. \tag{44}$$

В работе [11] доказано, что если $y(t)$ — решение уравнения (43) для $t \geqslant 0$ с начальными условиями (44), то существует такое число $d > 0$, зависящее от a, B, ε_0, c_0, что $\lim_{t\to d} y(t) = +\infty$. Кроме того, $y'(t) > 0$ при $t \in (0, d)$.

Возьмем начало прямоугольной системы координат на плоскости $z = 0$ в точке O. Пусть $s(x) = \sqrt{x^{1^2} + \dots + x^{n^2}}$ — евклидово расстояние от точки O до точки $x = (x^1, \dots, x^n)$, а $y(t)$ — решение уравнения (43) с начальными условиями (44) при $t \geqslant 0$. Тогда функция $v(x) = y(s(x))$, очевидно, обладает свойствами 1), 2), 4). Подберем постоянные B, ε_0, c_0 так, чтобы выполнялось свойство 3). Заметим, что функция $v(x)$ принадлежит только классу C^1, поэтому дифференциальные неравенства с участием $v(x)$ мы понимаем в расширенном смысле, как это делается в работе [12]. Там дано определение, которое в нашем случае примет следующий вид.

Определение. *Будем говорить, что Δv (слабо) $\leqslant u$ на множестве Σ, если для каждой точки $x_0 \in \Sigma$ и каждого числа $\alpha > 0$ существуют окрестность V_{α,x_0} точки x_0 и функция $v_{\alpha,x_0}(x) \in C^2$ в V_{α,x_0}, которая удовлетворяет следующим условиям:*

a) $v(x) - v_{\alpha,x_0}(x)$ достигает максимального значения на V_{α,x_0} в точке x_0;

b) $\Delta v_{\alpha,x_0}(x_0) < u(x_0) + \alpha$.

Δv (слабо) $\geqslant u$ на множестве Σ, если $\Delta(-v)$ (слабо) $\leqslant -u$ на множестве Σ.

При этом (см. [12]) принцип максимума имеет место в обычной формулировке.

Для каждой точки x в области Σ, за исключением точки O, имеем

$$\Delta v = g^{ij} v_{,ij} = g^{ij} \frac{\partial s}{\partial x^i} \frac{\partial s}{\partial x^j} y'' + y' \Delta s. \tag{45}$$

Выберем такие направления осей $x^1, \dots, x^n$ прямоугольной системы координат, чтобы матрица (z_{ij}) стала диагональной в точке x. Из результатов разд. 3 следует, что все вторые производные $z_{ii}(x)$ оцениваются сверху и снизу:

$$0 < M_2 \leqslant z_{ii}(x) \leqslant M_1,$$

где величины M_1 и M_2 зависят только от ε и вторых производных функции $z(x)$ в фиксированной точке, например в точке O. Метрика, введенная в разд. 4, будет диагональной в точке x, поэтому, используя (24), получим в этой точке

$$\Delta s \leqslant \frac{n-1}{s}\max_i g^{ii} + |\frac{1}{2}g^{ii}g^{gg}(2\varepsilon_{iqi} - \varepsilon_{iiq})|.$$

А воспользовавшись еще (26)–(28), (31), получим

$$\Delta s \leqslant \frac{(n-1)(1+\varepsilon)(1+\varepsilon_1)}{sM_2} + \frac{(18\varepsilon_1 + (n+2)\varepsilon_2)(1+\varepsilon_1)n^2P^{1/2}}{2M_2^{1/2}}. \tag{46}$$

Заметим, что

$$|\mathrm{grad} v|^2 = y'^2 g^{ij}\frac{\partial s}{\partial x^i}\frac{\partial s}{\partial x^j},$$

$$\min_i g^{ii} \leqslant g^{ij}\frac{\partial s}{\partial x^i}\frac{\partial s}{\partial x^j} \leqslant \max_i g^{ii}.$$

Следовательно,

$$\frac{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon_1)}{M_1} \leqslant g^{ij}\frac{\partial s}{\partial x^i}\frac{\partial s}{\partial x^j} \leqslant \frac{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon_1)}{M_2}. \tag{47}$$

Поэтому

$$\frac{|\mathrm{grad} v|^2 M_2}{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon_1)} \leqslant y'^2 \leqslant \frac{|\mathrm{grad} v|^2 M_1}{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon_1)}. \tag{48}$$

Теперь подставим в (45) выражение для $y''(s)$, полученное из (43), воспользуемся (46)–(48), учтем, что $y'(s) > 0$, и возьмем

$$B = \frac{(n-1)(1+\varepsilon)(1+\varepsilon_1)M_1}{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon_1)M_2}, c_0 = \frac{(A-H)M_2}{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon_1)}, \varepsilon_0 = \frac{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon_1)\delta M_2}{2n(1+\varepsilon)(1+\varepsilon_1)M_1)},$$

где $H > 0$ чуть позже выберем так, чтобы выполнялось условие $A - H > 0$. Тогда получим в точке x

$$\Delta v \leqslant (A-H)v^3 - \frac{2n|\mathrm{grad} v|^2}{\delta v} + \frac{(18\varepsilon_1 + (n+2)\varepsilon_2)(1+\varepsilon_1)n^2P^{1/2}y'}{2M_2^{1/2}}. \tag{49}$$

Используя неравенство Коши с постоянной $\varkappa$, получаем

$$\frac{(18\varepsilon_1 + (n+2)\varepsilon_2)(1+\varepsilon_1)n^2P^{1/2}y'}{2M_2^{1/2}}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{y'^2}{\varkappa} + \frac{\varkappa(18\varepsilon_1 + (n+2)\varepsilon_2)^2(1+\varepsilon_1)^2n^4P}{4M_2}\right).$$

Отсюда, взяв

$$\varkappa = \frac{M_1\delta\sqrt{P}}{2(1-\varepsilon)(1-\varepsilon_1)n} \quad \text{и положив} \quad H = \frac{(18\varepsilon_1 + (n+2)\varepsilon_2)^2(1+\varepsilon_1)^2 n^4 \delta M_1}{16(1-\varepsilon)(1-\varepsilon_1)nM_2},$$

из (49)и (48) получаем

$$\Delta v \leqslant (A-H)v^3 + HP^{3/2} - \frac{2n|\mathrm{grad} v|^2}{\delta v} + \frac{n|\mathrm{grad} v|^2}{\delta\sqrt{P}}.$$

Из определения H и A, введенного соотношением (41), видно, что при

$$\frac{n+1}{4n(n-1)} - (72n^7 + 1167n^6)\varepsilon_1 - 230,5n^6\varepsilon_2 > 0 \tag{50}$$

можно выбрать такое $\delta > 0$, что $A - H > 0$. Следовательно, условие 3) для функции $v(x)$ будет выполняться во всей ее области определения, за исключением, быть может, точки O. Так как $\varepsilon_1 = (n-1)\varepsilon, \varepsilon_2 = (n-1)^2\varepsilon$, то при

$$\varepsilon < \frac{1}{1210n^6(n-1)^2(n+3)}$$

условие (50) выполняется.

Теперь проверим, что функция $v(x)$ удовлетворяет условию 3) и в точке O. Заметим, что в точке O правая часть неравенства в 3) равна $a^3(A+7H)$. Возьмем

$$v_{\alpha,O}(x^1,\ldots,x^n) = a + \frac{1}{2}\frac{a^3(A+7H)+\alpha}{g^{11}(O)+\cdots+g^{nn}(O)}({x^1}^2 + \cdots + {x^n}^2).$$

Тогда условие b) определения выполняется. Из уравнения (43) получаем, что $y''(0) = c_0a^3/(1+B)$. С помощью (26) и оценки $z_{ii} \geqslant M_2$ легко проверить, что $c_0a^3/(1+B) < (a^3(A+7H)+\alpha)/(g^{11}(O)+\cdots+g^{nn}(O))$. Теперь выполнимость условия a) определения следует из разложения Тейлора $y(s) = a + \frac{1}{2}y''(0)s^2 + \cdots$. Функция $v(x)$ построена.

При доказательстве теоремы нам потребовалась пятикратная дифференцируемость функции $z(x^1,\ldots,x^n)$.По теореме 11.3 из [13] о гладкости решений эллиптических уравнений для выполнения этого условия достаточно потребовать принадлежности функции φ классу $C^{3,\alpha}$.

Из (1), (2) и неравенства $\left(\dfrac{\sigma_k}{C_n^k}\right)^{1/k} \geqslant \sigma_n^{1/n}$ вытекает, что условия на функцию φ достаточно налагать в области $\sigma_k > C_n^k(1-\varepsilon)^{k/n}$, $k = 1,\ldots,n-1$. Теорема доказана.

Тот факт, что выполнимость условий (2)–(5) достаточно требовать в области $\sigma_k > C_n^k(1-\varepsilon)^{k/n}$, $k = 1, \ldots, n-1$, сильно облегчает построение большого числа функций, удовлетворяющих условиям теоремы. Можно, например, взять

$$\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \sin \frac{1}{\sigma_k},$$

где коэффициенты A_k легко подбираются.

Список литературы

[1] *В.Н. Кокарев*, Обобщение теоремы Калаби–Погорелова. — *Тр. Междунар. школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова*, Ростов-на-Дону (2002), 33–34.

[2] *K. Jörgens*, Über die Lösungen der Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$. — *Math. Ann.* **127** (1954), 130–134.

[3] *E. Calabi*, Improper affine hyperspheres of convex type and a generalizations of a theorem by K. Jörgens. — *Michigan Math. J.* **5** (1958), № 2, 105–126.

[4] *А.В. Погорелов*, Многомерная проблема Минковского. Наука, Москва, 1975.

[5] *G. Tzitzeika*, Sur une Nouvelle Classe de Surfaces. — *Comtes Rendus Acad. Sci. Paris* **145** (1907), 132–133; **146** (1908), 165–166.

[6] *А.Д. Александров*, Смешанные дискриминанты и смешанные объемы. — *Матем. сб.* (1938), № 2, 227–251.

[7] *А.В. Погорелов*, Многомерное уравнение Монжа-Ампера $\det(z_{ij}) = \varphi(z_1, \ldots, z_n, z, x_1, \ldots, x_n)$. Наука, Москва, 1988.

[8] *П. Ланкастер*, Теория матриц. Наука, Москва, 1978.

[9] *В.Л. Загускин*, Об описанных и вписанных эллипсоидах экстремального объема. — *Успехи мат. наук* **13** (1958), № 6, 89–92.

[10] *Р. Беллман*, Введение в теорию матриц. Наука, Москва, 1976.

[11] *В.Н. Кокарев*, О полных выпуклых решениях уравнения $\mathrm{spur}_m(z_{ij}) = 1$. — *Мат. физика, анализ, геом.* **3** (1996), 102–117.

[12] *E. Calabi*, An Extension of E. Hopf's Maximum Principle with an Application to Riemannian Geometry. — *Duce Math. J.* **25** (1958), 45–56.

[13] *С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг*, Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. 1. Изд-во иностр. лит., Москва, 1962.

On Complete Convex Solutions of Equations Similar to the Improper Affine Sphere Equation

V.N. Kokarev

Samara State University
1 Acad. Pavlov Str., Samara, 443011, Russia
E-mail:ko1949@yandex.ru

Received April 22, 2007

Let σ_k — the sum of all k-order Hessian principal minors (z_{ij}) for the function $z(x^1, \ldots, x^n)$. If φ of the $n-1$ positive variable belongs to the $C^{3,\alpha}$ class, $0 < \alpha < 1$, and if it is sufficiently close to the identically single function, then any complete convex solution $z(x^1, \ldots, x^n)$ of the equation

$$\sigma_n = \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$$

is a quadratic polynomial.

Key words: improper affine sphere.

Mathematics Subject Classification 2000: 58J05.